

Tempered operator stabile Verteilungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

M.SC. ANISSA BOUK ALI

eingereicht bei der
Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen

Siegen 2014

Erstgutachter: PROF. DR. HANS-PETER SCHEFFLER, Universität Siegen
Zweitgutachter: PROF. DR. PETER KERN Heinrich Heine Universität Düsseldorf
Tag der mündlichen Prüfung: 28.03.2014
gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

Abstract

Tempered operator stable laws are operator stable laws without normal component, for which we modify their Lévy measure to reduce the expected number of large jumps. We will introduce a characterisation of the obtained Lévy measure. Tempered operator stable distributions may have all moments finite. We prove short and long time behavior of the tempered operator stable Lévy process: In a short time frame it is close to an operator stable process while in a long time frame it approximates a Brownian motion.

Then we construct a random walk, which converges in distribution to a random vector with a tempered operator stable distribution under a triangular array scheme. We show that the random walk process converges to the Lévy process generated by the tempered operator stable distribution in the sense of finite-dimensional distributions.

We find probabilistic representations of tempered operator stable Lévy process. Such representation can be used for simulation.

Zusammenfassung

Tempered operator stabile Verteilungen sind operator stabile Verteilungen ohne Gaußanteil, deren Lévy-Maß so modifiziert wird, dass die Wahrscheinlichkeit der hohen Sprünge kleiner wird. Tempered stabile Verteilungen besitzen Momente beliebiger Ordnung. Auf kurze Zeit betrachtet, verhält sich ein tempered operator stabiler Lévy-Prozess wie ein operator stabiler Prozess, während er auf lange Zeit hin eine Brownsche Bewegung approximiert.

Außerdem konstruieren wir eine Irrfahrt, die in Verteilung gegen einen Zufallsvektor mit tempered operator stabiler Verteilung konvergiert. Dabei wurde der Konvergenzsatz für Dreieckssysteme angewendet. Wir zeigen, dass die endlichdimensionalen Verteilungen der zeitstetigen Irrfahrt gegen die von einem tempered operator stabilen Lévy-Prozess konvergieren.

Wir leiten eine Reihendarstellung für den tempered operator stabilen Lévy-Prozess her. Diese Darstellung kann auch für die Simulation benutzt werden.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler für die ausgezeichnete Betreuung bedanken. Herrn Prof. Dr. Peter Kern danke ich dafür, dass er sich bereit erklärt hat, die Arbeit zu begutachten.

Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. Alfred Müller und Katharina Hees für die Unterstützung an der Universität.

Ich danke meiner Familie für die ständige und vielfältige Unterstützung, die ich in den vergangenen Jahren durch sie erfahren habe.

Inhaltsverzeichnis

A	Symbolverzeichnis	IX
B	Abkürzungsverzeichnis	XIII
1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Reguläre Variation	5
2.2	Operator stabile Verteilungen	10
2.3	Verallgemeinerte Polarkoordinaten	12
3	Tempered operator stabile Verteilungen	15
3.1	ρ -tempered operator stabile Verteilungen	15
3.2	Tempered operator stabile Verteilungen	38
3.3	Verallgemeinerte tempered operator stabile Verteilungen	45
4	Grenzverteilung einer tempered Irrfahrt	51
4.1	Tempered Irrfahrt	51
4.2	Grenzverteilung der tempered Irrfahrt	61
5	Reihendarstellung eines $pTOS_E$ Lévy-Prozesses	77
5.1	Reihendarstellung	77
5.2	Beispiele	82
5.3	R-Algorithmus	84
C	Literaturverzeichnis	89

Symbolverzeichnis

$ \cdot $	Betrag
$[\cdot]$	Gaußklammer
$\ \cdot\ $ und $\ \cdot\ _0$	Normen auf \mathbb{R}^d
$\ f\ _{L^1(S_0,\sigma)}$	$\ f\ _{L^1(S_0,\sigma)} = \int_{S_0} f(u) \sigma(du)$
$\langle x, y \rangle$	Skalarprodukt von x und y aus \mathbb{R}^d
∂A	Rand der Menge A
$\frac{\partial^n \pi(r,u)}{\partial r^n}$ für $n = 1, 2, \dots$	n -te partielle Ableitung der Funktion π nach r
1_A	Indikatorfunktion auf die Menge A
A^c	Komplement der Menge A
$(a, b)^T$	Transponierte des Spaltenvektors
$a \vee b$	Maximum von a und b
$a \wedge b$	Minimum von a und b
$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, A_n \in L(\mathbb{R}^d)$	Folge von linearen Operatoren
$\mathbb{B} = \{B(t) : t \geq 0\}$	Brownsche Bewegung
$\mathcal{B}(\Gamma), \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ bzw. $\mathcal{B}((0, \infty))$	Borelsche σ -Algebra auf der Grundmenge Γ, \mathbb{R}^d bzw. $(0, \infty)$
$B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : \tau(x) < \epsilon\}$	offene Kugel in \mathbb{R}^d
$C^\infty((0, \infty))$	Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $(0, \infty)$
$dist(A, 0)$	$dist(A, 0) = \inf\{\ x\ : x \in A\}$ Abstand der Menge A von der Null
$D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$	Skorohod-Raum: der Raum aller càdlàg Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ versehen mit der Skorohod-Topologie.
Ξ	Menge aller Elementarfunktionen
e_1, \dots, e_d	Standardbasis des \mathbb{R}^d
$\mathbb{E}(X)$	Erwartungswert von X
$E _V$ mit $E \in L(\mathbb{R}^d)$	Einschränkung des linearen Operators E auf der Menge V
ϵ_a mit $a \in \mathbb{R}$	Dirac-Maß im Punkt a
F^-	negativer Anteil der Funktion F
F^+	positiver Anteil der Funktion F
$f^{-1}, f \in GL(\mathbb{R}^d)$	Inverse des linearen Operators f
$f^*, f \in L(\mathbb{R}^d)$	Transponierte des linearen Operators f
$f^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}_0$	n -te Ableitung der Funktion f nach x
$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Folge von Funktionen

$F_n \uparrow F$	$F_n \leq F_{n+1}$ und $F_n \rightarrow F$
Γ	$\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$
$\Gamma(x)$	Gammafunktion
$GDOA(\nu)$	verallgemeinerter Anziehungsbereich der operator stabilen Verteilung ν
$GL(\mathbb{R}^d)$	Menge der invertierbaren linearen Operatoren auf \mathbb{R}^d
I	Identitätsoperator
i	imaginäre Einheit
$L^1(S_0, \sigma)$	Raum der messbaren Funktionen f auf S_0 mit $\int_{S_0} f(u) \sigma(du) < \infty$
\liminf, \limsup	Limes inferior, Limes superior
\ln	Natürlicher Logarithmus
$L(\mathbb{R}^d)$	Menge der linearen Operatoren $E : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
$l(x)$	Richtung von $x \in \mathbb{R}^d$
λ^E für $\lambda > 0$	$\lambda^E = \exp(E \ln \lambda)$
\mathcal{M}	Menge aller σ -endlichen Maße, die außerhalb einer Umgebung von 0 endlich sind
\max, \sup	Maximumsfunktion, Supremum
$\mu \sim [a, Q, \phi]$	μ besitzt die Lévy-Darstellung $[a, Q, \phi]$
μ^c	unendlich teilbare Verteilung mit Lévy-Darstellung $[c \cdot a, c \cdot Q, c \cdot \phi]$, falls $\mu \sim [a, Q, \phi]$
$\hat{\mu}$	charakteristische Funktion
$\mu * \nu$	Faltung von μ und ν
$(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Folge von Maßen
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\nu _{x:\{\ x\ >\theta\}}$	Einschränkung des Maßes ν auf der Menge $\{x : \ x\ > \theta\}$
$\nu_n \rightarrow \nu$ in \mathcal{M}	$\nu_n(A) \rightarrow \nu(A)$ für alle ν -Stetigkeitsmengen $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $\text{dist}(A, 0) > 0$
$\nu_n \xrightarrow{w} \nu$	schwache Konvergenz von Maßen
$pTOS_E$	proper tempered operator stabile Verteilung mit Exponent E ($\rho = 1$)
$pTOS_E^\rho$	proper ρ -tempered operator stabile Verteilung mit Exponent E
$q(0^+, u)$ für alle $u \in S_0$	$\lim_{r \downarrow 0} q(r, u)$ für alle $u \in S_0$
\mathbb{R}^d	Raum der d-dimensionalen reellen Spaltenvektoren
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
$\Re(z)$	Realteil von z
$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : \ x\ _0 = 1\}$	Einheitssphäre auf \mathbb{R}^d
$\{S_n(\lfloor nt \rfloor) : t \geq 0\} \xrightarrow{fdd} \mathbb{X}$	Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen von $\{S_n(\lfloor nt \rfloor) : t \geq 0\}$ gegen die von \mathbb{X}
$\tau(x)$	Radius von $x \in \mathbb{R}^d$
$(\tau(x), l(x))$ für $x \in \mathbb{R}^d$	verallgemeinerte Polarkoordinaten bzgl. eines linearen Operators E , d. h. $x = \tau(x)^E l(x)$
$T\nu$	Bildmaß
TOS_E	tempered operator stabile Verteilung mit Exponent E ($\rho = 1$)
TOS_E^ρ	ρ -tempered operator stabile Verteilung mit Exponent E
$U_b(r, x)$	Abgeschnittenes Moment

$V_0(r, x)$	Tailfunktion
$V_1 \oplus V_2$	direkte Summe von V_1 und V_2
$V_a(r, x)$	Tail-Moment
$x \downarrow 0$	x konvergiert von oben gegen 0
$X \sim \mu$	X besitzt die Verteilung μ
$X \stackrel{d}{=} Y$	X und Y sind identisch verteilt
$\mathbb{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$	Lévy-Prozess
$\mathbb{X}_h = \{X_h(t) : t \geq 0\}$	Lévy-Prozess mit $X_h(t) = X(ht)$ für alle $t \geq 0$
$\mathbb{X}_h \Rightarrow \mathbb{X}$ in $D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$	Konvergenz in Verteilung der Prozesse in dem Skorohod-Raum
$X_n \Rightarrow X$	Konvergenz in Verteilung
\square	Ende eines Beweises

Abkürzungsverzeichnis

bzw.	beziehungsweise
bzgl.	bezüglich
càdlàg	rechtsseitig stetig mit linksseitigen Limiten
d. h.	das heißt
engl.	in englisch
franz.	in französisch
o. B. d. A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Kapitel 1

Einleitung

Tempered stabile Verteilungen besitzen vielfältige Anwendungen. Als Beispiele nennen wir Finanzmathematik, Biostatistik, Informatik und Physik (siehe die Literatur in [10]). Bevor wir mehr Informationen über tempered stabile Verteilungen sammeln, führen wir an dieser Stelle ein Beispiel ein, wie man auf tempered stabile Verteilung gekommen ist. Zur Veranschaulichung sei X eine positive Zufallsvariable. X besitze eine α -stabile Verteilung mit Index $0 < \alpha < 1$ und Dichte $f(x)$, so dass

$$\mathbb{E}(e^{-sX}) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \exp(-Ds^\alpha) \quad (1.1)$$

für alle $s > 0$ gilt, wobei D eine positive Konstante ist. Wegen (1.1) ist die Funktion $e^{-\lambda x} f(x)$ keine Dichte. Aber wir können durch $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x} f(x) e^{D\lambda^\alpha}$ eine Dichte definieren, die sogenannte **exponentiell tempered stabile Dichte**. Die Laplace-Transformierte dieser Dichte besitzt nach (1.1) die Darstellung

$$\int_0^\infty e^{-sx} e^{-\lambda x} f(x) e^{D\lambda^\alpha} dx = \exp[-D((\lambda + s)^\alpha - \lambda^\alpha)].$$

Lemma 2.2.1 auf Seite 67 in [28] impliziert, dass (1.1) für $s = \lambda + ik$ für alle $\lambda > 0$ und $k \in \mathbb{R}$ gilt. Daraus folgt

$$\int_0^\infty e^{-ikx} e^{-\lambda x} f(x) e^{D\lambda^\alpha} dx = \exp[-D((\lambda + ik)^\alpha - \lambda^\alpha)]. \quad (1.2)$$

Dann liefert (1.2), dass die tempered stabile Verteilung mit Dichte f_λ unendlich teilbar mit Log-charakteristischer Funktion

$$\psi_\lambda(-k) = -D((\lambda + ik)^\alpha - \lambda^\alpha)$$

ist. Beachte, f_λ ist im Fall $\lambda = 0$ die Dichte einer stabilen Verteilung. Wir zeigen jetzt, dass sich diese unendlich teilbare Verteilung aus der Änderung des Lévy-Maßes einer stabilen Verteilung ergibt. Nach Proposition 3.10 im Buch [19] besitzt die Zufallsvariable X mit Laplace-Transformierter (1.1) die charakteristische Funktion der Form

$$\mathbb{E}(e^{ikX}) = e^{\psi(k)}$$

mit

$$\psi(k) = \int_0^\infty (e^{ikx} - 1)\phi(dx)$$

und

$$\phi(dx) = C\alpha x^{-\alpha-1}1_{\{x>0\}}dx,$$

wobei $D = C\Gamma(1 - \alpha)$. Wir definieren das tempered Lévy-Maß durch

$$\phi_\lambda(dx) = e^{-\lambda x}C\alpha x^{-\alpha-1}1_{\{x>0\}}dx.$$

Da $0 < \alpha < 1$ ist, folgt

$$\int_0^1 x\phi_\lambda(dx) = C\alpha \int_0^1 x^{-\alpha}e^{-\lambda x}dx \leq C\alpha \int_0^1 x^{-\alpha}dx < \infty.$$

Somit existiert nach Theorem 3.8 (a) aus dem Buch [19] eine eindeutige unendlich teilbare Verteilung mit charakteristischer Funktion $e^{h(k)}$ mit

$$\begin{aligned} h(k) &= \int_0^\infty (e^{ikx} - 1)\phi_\lambda(dx) \\ &= \int_0^\infty (e^{(ik-\lambda)x} - e^{-\lambda x})C\alpha x^{-\alpha-1}dx \\ &= \int_0^\infty (e^{(ik-\lambda)x} - 1)C\alpha x^{-\alpha-1}dx - \int_0^\infty (e^{-\lambda x} - 1)C\alpha x^{-\alpha-1}dx \\ &= -C\Gamma(1 - \alpha)(\lambda - ik)^\alpha + C\Gamma(1 - \alpha)\lambda^\alpha \\ &= -D((\lambda - ik)^\alpha - \lambda^\alpha) \\ &= \psi_\lambda(k). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass „Tempering“ einer positiven stabilen Verteilung in diesem Fall äquivalent zum „Tempering“ ihres Lévy-Maßes ist.

Tempered stabile Verteilungen sind **stabile Verteilungen** ohne Gaußanteil, deren Lévy-Maß so modifiziert wird, dass die Wahrscheinlichkeit der hohen Sprünge kleiner wird. Der tempered stabile Fall, wo das Lévy-Maß durch eine **vollständig monotone Funktion** modifiziert wird, wurde durch Rosiński betrachtet. Er hat in seinem Artikel [22] die tempered stabilen Verteilungen durch ihre **Rosiński-Maße** charakterisiert. Im Gegensatz zu α -stabilen Verteilungen können tempered α -stabile Verteilungen Momente beliebiger Ordnung besitzen. Rosiński hat auch gezeigt, dass sich tempered α -stabile Lévy-Prozesse auf kurze Zeit wie ein α -stabiler Lévy-Prozess und auf lange Zeit wie eine Brownsche Bewegung verhalten. Er hat eine Reihendarstellung für die tempered α -stabilen Lévy-Prozesse hergeleitet. Grabchak hat im Artikel [10] eine größere Menge von tempered stabilen Verteilungen, die sogenannten **p-tempered α -stabilen Verteilungen**, betrachtet. Dabei kontrolliert der Parameter p die Geschwindigkeit, mit der die Masse der Tails des Lévy-Maßes verkleinert wird. Außerdem haben Rosiński und Sinclair im Artikel [23] die Klasse der **verallgemeinerten tempered stabilen Verteilungen** vorgestellt. Diese Klasse enthält alle proper p-tempered stabilen Verteilungen. Die verallgemeinerten tempered stabilen Lévy-Prozesse geben das Verhalten eines α -stabilen Lévy-Prozesses und das Verhalten einer Brownsche Bewegung wieder. Im Artikel [5] haben Chakrabarty und Meerschaert **eine Irrfahrt** konstruiert, die

in Verteilung gegen eine proper tempered stabile Verteilung konvergiert.

Da α -stabile Verteilungen ein Spezialfall der (t^E) **operator stabilen Verteilungen** mit dem Exponent $E = \frac{1}{\alpha}I$ sind, wollen wir in dieser Arbeit die Theorie der tempered stabilen Verteilungen für operator stabile Verteilungen verallgemeinern. **Die operator stabilen Verteilungen** sind durch eine $d \times d$ Matrix E , den sogenannten **Exponent**, und ein endliches Maß σ auf der $d - 1$ -dimensionalen Einheitskugel, das sogenannte **Spektralmaß**, charakterisiert. Der Exponent E einer (t^E) operator stabilen Verteilung ist nicht eindeutig. Das Buch [18] ist eine umfassende Referenz über operator stabile Verteilungen.

In dieser Arbeit modifizieren wir das Lévy-Maß einer operator stabilen Verteilung ohne Gaußanteil, um die sogenannten **tempered operator stabilen Verteilungen** zu definieren. Im Abschnitt 1 von Kapitel 3 wird das Lévy-Maß einer **ρ -tempered operator stabilen Verteilung** durch das Rosiński-Maß charakterisiert. Wir zeigen, dass im Gegensatz zu operator stabilen die tempered operator stabilen Verteilungen Momente beliebiger Ordnung besitzen können. Außerdem beweisen wir, dass ein ρ -tempered operator stabiler Lévy-Prozess unter geeigneter Raum- und Zeitskalierung auf kurze Zeit sich wie ein operator stabiler Lévy-Prozess verhält, während er auf lange Zeit hin eine Brownsche Bewegung approximiert. Im Abschnitt 2 betrachten wir den **Spezialfall** $\rho = 1$. In dem letzten Abschnitt des Kapitels 1 beschäftigen wir uns mit den sogenannten **verallgemeinerten tempered operator stabilen Verteilungen**. Es wird für diese Klasse nur die Aussage über das Kurz- und Langzeitverhalten des verallgemeinerten tempered operator stabilen Lévy-Prozesses bewiesen, weil die **Tempering-Funktion** keine explizite Darstellung wie bei den zwei vorher genannten Klassen besitzt. Da operator stabile Verteilungen als Grenzverteilungen von affinen Transformation der Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren auftreten, konstruieren wir in Kapitel 2 **eine Irrfahrt**, die unter geeigneter Zentrierung in Verteilung gegen eine tempered operator stabile Verteilung konvergiert. Danach zeigen wir, wie in Abhängigkeit der Realteile der Eigenwerte des Exponenten E **die Zentrierungskonstante** ausgewählt werden kann. In dem letzten Kapitel finden wir **eine Reihendarstellung** für den tempered operator stabilen Lévy-Prozess. Diese Darstellung zeigt, wie wir durch Abschneiden der Sprünge eines operator stabilen Lévy-Prozesses einen tempered operator stabilen Lévy-Prozess erhalten.

Diese Arbeit orientiert sich an den Artikeln von Rosiński [22], Grabchak [10], Rosiński und Sinclair [23], Chakrabarty und Meerschaert [5] und an dem Buch von Meerschaert und Scheffler [18].

Kapitel 2

Grundlagen

Wir werden in diesem Kapitel die grundlegenden Sätze aufführen, die wir in den Beweisen der kommenden Kapitel anwenden werden. Auf Beweise soll an dieser Stelle verzichtet werden. Wir empfehlen dafür das Buch [18].

2.1 Reguläre Variation

Reguläre Variation beschreibt eine asymptotische Eigenschaft von Funktionen und Maßen. Diese Theorie hat eine wachsende Anzahl von Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie vereinfacht die Aussage und den Beweis der wichtigsten Grenzwertsätze für Summen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvektoren und charakterisiert die Normierungsoperatoren in diesen Sätzen. Reguläre Variation ist in dieser Arbeit auch ein sehr wichtiges Hilfsmittel, insbesondere in Kapitel 4. Für den univariaten Fall siehe z. B. [4]. Für die multivariate reguläre Variation siehe Part II aus dem Buch [18].

Wir beginnen mit der Definitionen der regulären Variation von positiven Funktionen und linearen Operatoren.

Definition 2.1.1.

- (i) Eine Borel-messbare Funktion $R : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ heißt **regulär variierend im Unendlichen mit Index** $\rho \in \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \lambda^\rho$$

für alle $\lambda > 0$. Eine regulär variierende Funktion mit Index Null nennen wir **langsam variierend**.

- (ii) Sei $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow GL(\mathbb{R}^d)$ Borel-messbar, wobei $GL(\mathbb{R}^d)$ die Lie Gruppe der invertierbaren linearen Operatoren auf \mathbb{R}^d ist. Wir sagen, dass f **regulär variierend im Unendlichen mit Index** E ist, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\lambda t) f(t)^{-1} = \lambda^E$$

für alle $\lambda > 0$. Dabei gilt $\lambda^E = \exp(E \ln \lambda)$ und **das Exponential eines linearen Operators** ist definiert durch

$$\exp(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E^k}{k!}$$

mit $E^0 = I$ der Identitätsoperator in \mathbb{R}^d . Falls $E = 0$ ist, dann ist f **langsam variierend**.

Für mehr Informationen über das Exponential eines linearen Operators siehe Abschnitt 2.2 aus dem Buch [18] oder Chapter 5 von [13].

Beispiel 2.1.2. Wir bezeichnen mit f^* **die Transponierte** von f .

Sei f regulär variierend mit Index E . Dann ist $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ regulär variierend mit Index $-E^*$, denn es folgt aus der Stetigkeit der Inversen und der Transponierten

$$(f(\lambda t)^*)^{-1} f(t)^* = \left([f(\lambda t) f(t)^{-1}]^* \right)^{-1} \rightarrow \left([\lambda^E]^* \right)^{-1} = \lambda^{-E^*}$$

für $t \rightarrow \infty$ für alle $\lambda > 0$.

Satz 2.1.3. Wenn f regulär variierend ist, ist die Konvergenz in der Definition 2.1.1 (ii) **kompakt gleichmäßig** in $\lambda > 0$.

Satz 2.1.4. Sei f regulär variierend mit Index E . Falls die Realteile der Eigenwerte von E größer als α sind, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha} \|f(t)x\| = \infty$$

kompakt gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq 0$. Falls die Eigenwerte von E Realteile kleiner als β besitzen, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\beta} \|f(t)x\| = 0$$

kompakt gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^d$.

Insbesondere gilt dann für den Spezialfall $f(t) = t^E$:

Satz 2.1.5. Sei $E \in L(\mathbb{R}^d)$. Wenn die Realteile der Eigenwerte von E größer als α sind, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha} \|t^E x\| = \infty$$

kompakt gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq 0$. Wenn die Eigenwerte von E Realteile kleiner als β besitzen, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\beta} \|t^E x\| = 0$$

kompakt gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^d$.

Korollar 2.1.6. Sei f regulär variierend mit Index E . Wenn alle Eigenwerte von E Realteile größer als α besitzen, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|f(t)^{-1}x\| = 0$$

kompakt gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^d$. Wenn die Realteile aller Eigenwerte von E kleiner als β sind, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta \|f(t)^{-1}x\| = \infty$$

kompakt gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq 0$.

Im Folgenden werden wir die reguläre Variation einer Folge von linearen Operatoren definieren.

Definition 2.1.7. Wir sagen, dass eine Folge invertierbarer linearer Operatoren $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **regulär variierend mit Index E** ist, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{\lfloor \lambda n \rfloor} A_n^{-1} = \lambda^E$$

für alle $\lambda > 0$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in RV(E)$.

Beispiel 2.1.8. $(n^E) \in RV(E)$, denn $\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor \lambda n \rfloor^E n^{-E} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lfloor \lambda n \rfloor}{n}\right)^E = \lambda^E$.

Die Definition 2.1.7 scheint eine schwächere Aussage als die in Definition 2.1.1 (ii) zu sein. Der nächste Satz zeigt aber, dass die reguläre Variation einer Folge von invertierbaren linearen Operatoren und die reguläre Variation einer zugehörigen Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow GL(\mathbb{R}^d)$ äquivalent sind.

Satz 2.1.9. Ist eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset GL(\mathbb{R}^d)$ regulär variierend mit Index E , so ist die Funktion $f(t) = A_{\lfloor t \rfloor}$ auch regulär variierend mit dem gleichen Index E . Wenn f regulär variierend mit Index E ist, dann ist $A_n = f(n)$ regulär variierend mit dem gleichen Index E .

Seien $\Gamma = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und \mathcal{M} die Menge aller σ -endlichen Maße auf Γ , die endlich außerhalb jeder Umgebung des Nullpunktes sind. Formal heißt das:

$$\mathcal{M} = \left\{ \nu : \nu \text{ } \sigma\text{-endliches Maß auf } \Gamma \text{ und } \nu|_{\{x \in \Gamma : \|x\| > \epsilon\}} \text{ endlich für alle } \epsilon > 0 \right\}.$$

Für ν_n und ν aus \mathcal{M} schreiben wir $\nu_n \rightarrow \nu$ in \mathcal{M} für $n \rightarrow \infty$ genau dann, wenn $\nu_n(A) \rightarrow \nu(A)$ für $n \rightarrow \infty$ und für alle ν -Stetigkeitsmenge $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $\text{dist}(A, 0) > 0$ gilt. Diese Konvergenz heißt **die vage Konvergenz in \mathcal{M}** . Außerdem definieren wir für $T \in L(\mathbb{R}^d)$ und $\nu \in \mathcal{M}$ das **Bildmaß** $T\nu \in \mathcal{M}$ durch $T\nu(A) = \nu(T^{-1}A)$ für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$. Dabei ist $L(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller linearen Operatoren $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Definition 2.1.10. Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}$ ist **regulär variierend**, falls eine regulär variierende Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow GL(\mathbb{R}^d)$ mit Index $(-E)$ und eine regulär variierende Funktion $R : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit Index $\beta \neq 0$ existieren, so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)\mu}{R(t)} = \phi \quad \text{in } \mathcal{M} \tag{2.1}$$

gilt, wobei ϕ \mathcal{M} -voll ist (siehe Definition 3.1.19 auf Seite 50 in [18]). Wenn alle Eigenwerte von E negative Realteile besitzen, ist μ **regulär variierend in Null** und wenn alle Eigenwerte von E positive Realteile haben, so ist μ **regulär variierend im Unendlichen**.

Proposition 2.1.11. Wenn $\mu \in \mathcal{M}$ und (2.1) für eine regulär variierende Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow GL(\mathbb{R}^d)$ mit Index $(-E)$ und eine regulär variierende Funktion $R : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit Index $\beta \neq 0$, dann gilt

$$\lambda \cdot \phi = \lambda^B \phi \quad (2.2)$$

für alle $\lambda > 0$ mit $B = (-\frac{1}{\beta})E$.

Definition 2.1.12. Wenn $\phi \in \mathcal{M}$ und (2.2) für alle $\lambda > 0$ gilt, dann heißt B ein **Exponent von ϕ** . Wenn $\mu \in \mathcal{M}$ regulär variierend ist und (2.1) gilt, so gilt (2.2) auch und wir nennen B ein **Exponent von μ** . Wir schreiben $\mu \in RVM_0(B)$, falls μ regulär variierend in Null mit Exponent B ist und $\mu \in RVM_\infty(B)$, falls μ regulär variierend im Unendlichen mit Exponent B ist.

Proposition 2.1.13. Sei $\mu \in \mathcal{M}$ und sei ϕ \mathcal{M} -voll. Sei weiter $B \in GL(\mathbb{R}^d)$.

- (i) $\mu \in RVM_0(B)$ genau dann, wenn es eine regulär variierende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset GL(\mathbb{R}^d)$ mit Index B existiert, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot (A_n \mu) = \phi \quad \text{in } \mathcal{M} \quad \text{ist.}$$

- (ii) $\mu \in RVM_\infty(B)$ genau dann, wenn es eine regulär variierende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset GL(\mathbb{R}^d)$ mit Index $(-B)$ existiert, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (A_n \mu) = \phi \quad \text{in } \mathcal{M} \quad \text{ist.}$$

Definition 2.1.14. Seien $\mu \in \mathcal{M}$ und ϕ \mathcal{M} -voll. μ ist **R-O variierend**, wenn es eine regulär variierende Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow GL(\mathbb{R}^d)$ mit Index $(-E)$ und $h_t > 0$ wachsend mit $\lim_{t \rightarrow \infty} h_t = \infty$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_{t+1}}{h_t} = c \geq 1$ gibt, so dass

$$h_t(f(h_t)\mu) \rightarrow \phi \quad \text{in } \mathcal{M} \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

In diesem Fall schreiben wir $\mu \in ROV(E, c)$. Der lineare Operator E heißt ein **Exponent von μ** und c heißt **Skalierungsfaktor**. Wenn alle Eigenwerte von E positive Realteile haben, ist μ **R-O variierend im Unendlichen**.

Wir schreiben $\mu \in ROV_\infty(E, c)$.

Satz 2.1.15. Sei $\mu \in \mathcal{M}$.

- (i) Aus $\mu \in RVM_\infty(E)$ folgt $\mu \in ROV_\infty(E, c)$ für jedes $c \geq 1$.
(ii) Ist $\mu \in ROV_\infty(E, 1)$, so gilt $\mu \in RVM_\infty(E)$.

Lemma 2.1.16. Sei $\mu \in ROV_\infty(E, c)$ für ein $c > 1$, dann gilt

$$c^E \phi = c \cdot \phi \quad (2.3)$$

E heißt auch ein **Exponent von ϕ** .

Definition 2.1.17. Sei $\mu \in \mathcal{M}$. Für $a, b \geq 0$ sind **das abgeschnittene Moment** U_b und **das Tail-Moment** V_a von μ definiert durch

$$\begin{aligned} U_b(r, x) &:= \int_{\{|\langle x, y \rangle| \leq r\}} |\langle x, y \rangle|^b \mu(dy) \\ V_a(r, x) &:= \int_{\{|\langle x, y \rangle| > r\}} |\langle x, y \rangle|^a \mu(dy), \end{aligned} \quad (2.4)$$

wenn die Integrale existieren.

Definition 2.1.18. Sei S ein kompakter topologischer Raum und sei die Funktion $R: \mathbb{R}^+ \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$ Borel-messbar. $R(r, \theta)$ ist **gleichmäßig R-O variierend**, falls es $r_0 > 0$, $\lambda_0 > 1$, $0 < m < 1$ und $M > 1$ gibt, so dass

$$m \leq \frac{R(\lambda r, \theta)}{R(r, \theta)} \leq M$$

für alle $r \geq r_0$, $1 \leq \lambda \leq \lambda_0$ und $\theta \in S$ gilt.

Satz 2.1.19. Sei $\mu \in ROV_\infty(E, c)$ für ein $c > 1$. Seien a_1, \dots, a_p die Realteile der Eigenwerte von $E \in L(\mathbb{R}^d)$ mit $p \leq d$ und $0 < a_1 < \dots < a_p$. Dann ist **die Tailfunktion**

$$V_0(r, x) = \mu \left\{ y \in \mathbb{R}^d : |\langle x, y \rangle| > r \right\} \quad (2.5)$$

kompakt gleichmäßig R-O variierend in $x \in \Gamma$. Außerdem existiert für jede kompakte Menge $S \subset \Gamma$ und $\gamma > 0$ Konstanten $c_1 > 0$, $c_2 < \infty$ und $r_0 > 0$, so dass

$$c_1 \lambda^{-\gamma - \frac{1}{a_1}} \leq \frac{V_0(r\lambda, x)}{V_0(r, x)} \leq c_2 \lambda^{\gamma - \frac{1}{a_p}} \quad (2.6)$$

für alle $r \geq r_0$, alle $\lambda \geq 1$ und alle $x \in S$.

Korollar 2.1.20. Sei $S \subset \Gamma$ kompakt. Sei $b > a$ und die Integrale $U_b(r, \theta), V_a(r, \theta)$ existieren für alle $r > 0$ und alle $\theta \in S$. Dann gilt:

- (i) U_b ist genau dann gleichmäßig R-O variierend, wenn für ein $M_2 < \infty$ und ein $r_0 > 0$

$$\frac{r^{b-a} V_a(r, \theta)}{U_b(r, \theta)} \leq M_2$$

für alle $r \geq r_0$ und alle $\theta \in S$ gilt.

- (ii) V_a ist genau dann gleichmäßig R-O variierend, wenn für ein $m_2 > 0$ und ein $r_0 > 0$

$$\frac{r^{b-a} V_a(r, \theta)}{U_b(r, \theta)} \geq m_2$$

für alle $r \geq r_0$ und alle $\theta \in S$ gilt.

Satz 2.1.21. Sei $\mu \in ROV_\infty(E, c)$ für ein $c > 1$. Die Realteile der Eigenwerte von $E \in L(\mathbb{R}^d)$ seien $0 < a_1 < \dots < a_p$ mit $p \leq d$. Wenn $b > \frac{1}{a_1}$ ist und U_b existiert, dann ist $U_b(r, x)$ kompakt gleichmäßig R-O variierend in $x \in \Gamma$. Desweiteren existieren für jede kompakte Menge $S \subset \Gamma$ und jedes $\gamma > 0$ die Konstanten $c_1 > 0$, $c_2 < \infty$ und $r_0 \geq 1$, so dass

$$c_1 \lambda^{b-\gamma-\frac{1}{a_1}} \leq \frac{U_b(\lambda r, x)}{U_b(r, x)} \leq c_2 \lambda^{b+\gamma-\frac{1}{a_p}} \quad (2.7)$$

für alle $r \geq r_0$, $\lambda \geq 1$ und $x \in S$ gilt.

Satz 2.1.22. Sei $\mu \in ROV_\infty(E, c)$ für ein $c > 1$. Die Realteile der Eigenwerte von $E \in L(\mathbb{R}^d)$ seien $0 < a_1 < \dots < a_p$. Ist $a < \frac{1}{a_p}$, dann existiert $V_a(r, x)$ für alle $r > 0$ und $x \in \Gamma$ und V_a ist kompakt gleichmäßig R-O variierend in $x \in \Gamma$. Für jede kompakte Menge $S \subset \Gamma$ und jedes $\gamma > 0$ existieren $c_1 > 0$, $c_2 < \infty$ und $r_0 \geq 1$, so dass

$$c_1 \lambda^{a-\gamma-\frac{1}{a_1}} \leq \frac{V_a(\lambda r, x)}{V_a(r, x)} \leq c_2 \lambda^{a+\gamma-\frac{1}{a_p}} \quad (2.8)$$

für alle $r \geq r_0$, $\lambda \geq 1$ und $x \in S$ gilt.

2.2 Operator stabile Verteilungen

Wir werden in diesem Abschnitt in Anlehnung an das Buch [18] zur Erinnerung die Definition der operator stabilen Verteilung und die Darstellung des Lévy-Maßes einer operator stabilen Verteilung, die keinen Gaußanteil besitzt, einführen. Die operator stabilen Verteilungen treten insbesondere als Grenzverteilung von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvektoren auf. Zum Lesen empfehlen wir Part III aus dem Buch [18] oder Kapitel 4 aus dem Buch [15].

Definition 2.2.1. Seien X, X_1, X_2, \dots unabhängig und identisch verteilte Zufallsvektoren in \mathbb{R}^d mit gemeinsamer Verteilung μ und sei Y ein Zufallsvektor mit Verteilung ν , die voll ist (siehe Definition 1.3.9 auf Seite 15 in [18]).

- (i) ν heißt **operator stabil**, wenn lineare Operatoren $A_n \in L(\mathbb{R}^d)$ und nicht-zufällige Vektoren $b_n \in \mathbb{R}^d$ existieren, so dass

$$A_n(X_1 + \dots + X_n) + b_n \Rightarrow Y, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

oder äquivalent

$$A_n \mu^n * \epsilon_{b_n} \xrightarrow{w} \nu, \quad n \rightarrow \infty$$

gilt.

- (ii) Wir sagen, dass X (oder äquivalent μ) zu dem **verallgemeinerten Anziehungsbereich** von Y (oder ν) gehört, falls (2.9) für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Teil (i) gilt.

In diesem Fall schreiben wir $X \in GDOA(Y)$ (oder $\mu \in GDOA(\nu)$).

Satz 2.2.2. *Ein volles Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf \mathbb{R}^d ist **operator stabil** genau dann, wenn ν unendlich teilbar ist und ein linearer Operator $E \in L(\mathbb{R}^d)$ existiert, so dass $\nu^t = t^E \nu * \epsilon_{a_t}$ für geeignete $a_t \in \mathbb{R}^d$ und für alle $t > 0$ gilt. Die Nullstellen des Minimalpolynoms von E liegen in der Halbebene $\{\Re(z) \geq \frac{1}{2}\}$ und alle Nullstellen, die in $\{\Re(z) = \frac{1}{2}\}$ liegen, sind einfach.*

*Außerdem gilt $\nu = \nu_1 * \nu_2$. Dabei sind ν_1 bzw. ν_2 definiert in E -invarianten Teilräumen V_1 bzw. V_2 mit $\mathbb{R}^d = V_1 \oplus V_2$. ν_1 ist eine volle operator stabile Verteilung auf V_1 und gehört zum Poisson'schen Typ, d. h. ν_1 besitzt keinen Gaußanteil. ν_2 ist ein volles Gauß'sches Maß auf V_2 . Das Spektrum von $E|_{V_1}$ liegt in $\{\Re(z) > \frac{1}{2}\}$ und für die Eigenwerte z von $E|_{V_2}$ gilt $\Re(z) = \frac{1}{2}$. (Siehe Theorem 7.2.1 Seite 259 in [18])*

Bezeichnung: ν ist (t^E) operator stabil. Dabei heißt E ein **Exponent** von ν .

Im Folgenden betrachten wir (t^E) operator stabile Verteilung ν mit charakteristischer Funktion

$$\hat{\nu}(\lambda) = \exp\left(i \langle \lambda, a \rangle + \int_{\Gamma} \left(e^{i \langle \lambda, x \rangle} - 1 - i \langle \lambda, x \rangle 1_{\{\|x\| < 1\}} \right) \phi_0(dx)\right).$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}^d$, ϕ_0 ist das Lévy-Maß und ν hat keinen Gaußanteil. Der nächste Satz gibt eine Polardarstellung für das Lévy-Maß ϕ_0 und stellt das Spektralmaß vor.

Satz 2.2.3. ν sei eine volle (t^E) operator stabile Verteilung mit $\nu \sim [a, 0, \phi_0]$, d. h. ν ist unendlich teilbar mit $a \in \mathbb{R}^d$, Lévy-Maß ϕ_0 und ν besitzt keinen Gaußanteil. Dann existiert eine Norm $\|\cdot\|_0$ auf \mathbb{R}^d , so dass

$$\phi_0(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \quad (2.10)$$

für $A \subset \Gamma = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, wobei $\sigma(D) = \phi_0\{t^E u : u \in D, t > 1\}$ ein endliches Borelmaß auf der Einheitskugel $S_0 = \{x : \|x\|_0 = 1\}$ ist. Das Maß σ nennen wir **das Spektralmaß** von ϕ_0 .

Bemerkung 2.2.4. Nach Lemma 6.1.5 Seite 169 im Buch [18] können wir die Norm $\|\cdot\|_0$ auf \mathbb{R}^d wie folgt auswählen

$$\|x\|_0 = \int_0^1 \|s^E x\| \frac{ds}{s},$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^d ist. Diese Norm $\|\cdot\|_0$ erfüllt für den gegebenen Exponent E folgende Eigenschaften:

- (i) Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq 0$ ist die Abbildung $t \mapsto \|t^E x\|_0$ streng monoton wachsend in $t > 0$.
- (ii) Die Abbildung $(t, x) \mapsto t^E x$ von $(0, \infty) \times S_0$ in Γ ist ein Homöomorphismus.

Satz 2.2.5. Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R}^d und sei ν eine volle (t^E) operator stabile Verteilung auf \mathbb{R}^d , die keinen Gaußanteil besitzt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\mu \in GDOA(\nu)$;
- (ii) $\mu \in RVM_\infty(E)$ mit Grenzmaß ϕ_0 ;
- (iii) es existiert eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in RV(-E)$, so dass

$$n(B_n\mu) \rightarrow \phi_0 \quad \text{in } \mathcal{M} \quad (2.11)$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei ϕ_0 \mathcal{M} -voll; und

- (iv) es existiert eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in RV(-E)$, so dass

$$B_n\mu^n * \epsilon_{b_n} \xrightarrow{w} \nu \quad (2.12)$$

für $n \rightarrow \infty$ und für eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$.

In diesem Fall besitzt ν die Lévy-Darstellung $[a, 0, \phi_0]$. Wir können außerdem die gleiche Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (2.11) und (2.12) wählen.

Beispiel 2.2.6. Sei $E \in L(\mathbb{R}^d)$. Seine Eigenwerte besitzen Realteile a_1, \dots, a_p mit $p \leq d$. Die Realteile erfüllen die Eigenschaft $\frac{1}{2} < a_1 < \dots < a_p$. Sei weiter Y ein Zufallsvektor in \mathbb{R}^d nach ν verteilt, wobei ν eine (t^E) operator stabile Verteilung ohne Gaußanteil mit Lévy-Maß ϕ_0 und Spektralmaß σ ist. U sei eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und ϑ sei nach $\frac{\sigma}{\sigma(S_0)}$ verteilt. U und ϑ seien unabhängig. Dann gilt $\left(\frac{U}{\sigma(S_0)}\right)^{-E} \vartheta \in GDOA(Y)$, denn es gilt $(n^{-E}) \in RV(-E)$ und es gilt für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\phi_0(\partial A) = 0$ und $\text{dist}(A, 0) > 0$

$$\begin{aligned} nP \left\{ n^{-E} \left(\frac{U}{\sigma(S_0)} \right)^{-E} \vartheta \in A \right\} &= \frac{n}{\sigma(S_0)} \int_{S_0} \int_0^1 1_A \left(\left(\frac{nu}{\sigma(S_0)} \right)^{-E} v \right) du \sigma(dv) \\ &= \int_{S_0} \int_{\frac{\sigma(S_0)}{n}}^\infty 1_A(r^E v) \frac{dr}{r^2} \sigma(dv) \\ &\rightarrow \phi_0(A) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz. Die letzte Gleichheit folgt aus der Substitution $r = \left(\frac{nu}{\sigma(S_0)}\right)^{-1}$. Damit liefert Satz 2.2.5 die Behauptung, da ϕ_0 \mathcal{M} -voll ist.

2.3 Verallgemeinerte Polarkoordinaten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den verallgemeinerten Polarkoordinaten und ihren Eigenschaften, die ein wichtiges Hilfsmittel in dieser Arbeit darstellen. Die Beweise sind im Kapitel 2 von Artikel [3] ausgearbeitet. Sei $\Gamma := \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ wie oben definiert und sei E eine $d \times d$ -Matrix. Die Eigenwerte von E besitzen positive Realteile $0 < a_1 < \dots < a_p$ für $p \leq d$. Nach Bemerkung 2.2.4 ist die Abbildung $\Psi : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow \Gamma$, $\Psi(r, u) = r^E u$ ein Homöomorphismus. Außerdem ist für alle $x \in \Gamma$ die Funktion $t \mapsto \|t^E x\|_0$ streng monoton wachsend. Also lässt sich jedes x eindeutig als

$$x = \tau(x)^E l(x)$$

mit einem **Radius** $\tau : \Gamma \rightarrow (0, \infty)$ und einer **Richtung** $l : \Gamma \rightarrow S_0$ schreiben. Dabei sind τ und l stetige Funktionen. Wir nennen $(\tau(x), l(x))$ **die verallgemeinerten Polarkoordinaten von x bzgl. des linearen Operators E** .

Beachte, dass $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : \tau(x) = 1\}$ kompakt ist. Darüber hinaus gilt

$$(i) \quad \tau(-x) = \tau(x), \quad l(-x) = -l(x)$$

$$(ii) \quad \tau(r^E x) = r\tau(x), \quad l(r^E x) = l(x)$$

(iii) und

$$\tau(x) \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{für } x \rightarrow \infty \\ 0 & \text{für } x \rightarrow 0. \end{cases}$$

Folgendes Lemma gibt sowohl eine obere als auch eine untere Schranke der Wachstumsrate von $\tau(x)$ in Abhängigkeit von den Realteilen a_1, \dots, a_p der Eigenwerte von E an.

Lemma 2.3.1. *Für jedes (kleine) $\delta, \delta' > 0$ existieren Konstanten $C_1, \dots, C_4 > 0$, so dass*

(i) für alle $\|x\|_0 \leq 1$ oder $\tau(x) \leq 1$ gilt:

$$C_1 \|x\|_0^{\frac{1}{a_1 - \delta}} \leq \tau(x) \leq C_2 \|x\|_0^{\frac{1}{a_p + \delta'}}, \quad (2.13)$$

(ii) für alle $\|x\|_0 \geq 1$ oder $\tau(x) \geq 1$ gilt:

$$C_3 \|x\|_0^{\frac{1}{a_p + \delta'}} \leq \tau(x) \leq C_4 \|x\|_0^{\frac{1}{a_1 - \delta}}. \quad (2.14)$$

Beweis Wir werden hier nur die ersten beiden Ungleichungen zeigen. Satz 2.1.5 impliziert, dass für alle $\delta > 0$ gilt:

$$r^{a_1 - \delta} \|r^{-E} u\|_0 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

gleichmäßig für $\|u\|_0 = 1$. Damit folgt

$$\|r^{-E}\|_0 := \sup_{u \in S_0} \|r^{-E} u\|_0 \leq C r^{-a_1 + \delta}$$

für alle $r \geq 1$ und eine Konstante $C > 0$. Äquivalent dazu erhalten wir

$$\|s^E\|_0 \leq C s^{a_1 - \delta}$$

für alle $s \leq 1$. Da $\|x\|_0 = \|\tau(x)^E l(x)\|_0 \leq \|\tau(x)^E\|_0 \leq C \tau(x)^{a_1 - \delta}$ gilt, folgt

$$\tau(x) \geq C_1 \|x\|_0^{\frac{1}{a_1 - \delta}}$$

für $\|x\|_0 \leq 1$, was äquivalent zu $\tau(x) \leq 1$ ist.

Analog zu diesem Ergebnis gilt für alle $\delta' > 0$

$$r^{-a_p - \delta'} \|r^E u\|_0 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

gleichmäßig für $\|u\|_0 = 1$. Daraus folgt

$$\|r^E\|_0 := \sup_{u \in S_0} \|r^E u\|_0 \leq C r^{a_p + \delta'}$$

für alle $r \geq 1$ und eine Konstante $C > 0$ oder äquivalent dazu

$$\|s^{-E}\|_0 \leq C s^{-a_p - \delta'}$$

für alle $s \leq 1$. Weiter gilt $l(x) = \tau(x)^{-E}x$. Somit folgt

$$1 = \|l(x)\|_0 \leq \|\tau(x)^{-E}\|_0 \|x\|_0 \leq C \tau(x)^{-a_p - \delta'} \|x\|_0$$

für $\|x\|_0 \leq 1$. Umschreiben liefert

$$\tau(x) \leq C_2 \|x\|_0^{\frac{1}{a_p + \delta'}}.$$

□

Lemma 2.3.2. *Es existiert eine Konstante $K \geq 1$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ folgendes gilt:*

$$\tau(x + y) \leq K (\tau(x) + \tau(y)). \quad (2.15)$$

Beweis Sei $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : \tau(x) + \tau(y) = 1\}$. Wegen Lemma 2.3.1 ist G beschränkt und wegen der Stetigkeit der Abbildung τ ist G abgeschlossen. Damit ist G kompakt. Somit besitzt die stetige Funktion $(x, y) \mapsto \tau(x + y)$ ein endliches Maximum K in G . Da $S_0 \times \{0\} \subset G$ ist, ist $K \geq 1$. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ setzen wir $s = (\tau(x) + \tau(y))^{-1}$. Aus $\tau(r^E x) = r\tau(x)$ folgt

$$\tau(x + y) = s^{-1} \tau(s^E(x + y)) = s^{-1} \tau(s^E x + s^E y).$$

Da aber $\tau(s^E x) + \tau(s^E y) = s(\tau(x) + \tau(y)) = 1$ ist, folgt $(s^E x, s^E y) \in G$ und damit erhalten wir

$$\tau(x + y) \leq K s^{-1} = K (\tau(x) + \tau(y)).$$

□

Kapitel 3

Tempered operator stabile Verteilungen

3.1 ρ -tempered operator stabile Verteilungen

Wir werden in diesem Abschnitt die ρ -tempered operator stabilen Verteilungen definieren und ihre Eigenschaften beweisen. Wir werden sehen, wie das Lévy-Maß solcher Verteilungen charakterisiert werden kann. Außerdem werden wir zeigen, dass eine solche Verteilung Momente beliebiger Ordnung besitzen kann. Diese hängen von dem sogenannten Rosiński-Maß ab. Eine weitere wichtige Eigenschaft ist, dass der ρ -tempered operator stabile Prozess das Verhalten eines operator stabilen und eines Gauß'schen Prozesses wiedergibt: Auf kurze Zeit betrachtet, verhält sich ein ρ -tempered operator stabiler Prozess wie ein operator stabiler Prozess, während er auf lange Zeit hin eine Brown'sche Bewegung approximiert.

Definition 3.1.1. Eine Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ heißt **vollständig monoton**, falls $f \in C^\infty((0, \infty))$ und $(-1)^n f^{(n)}(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 3.1.2. Sei $\rho > 0$. Ein volles, unendlich teilbares Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf \mathbb{R}^d heißt **ρ -tempered operator stabile Verteilung mit Exponent E** , falls μ keinen Gaußanteil besitzt und sein Lévy-Maß ϕ durch

$$\phi(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) q(r^\rho, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \quad (3.1)$$

für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ definiert ist, wobei σ ein endliches Maß auf S_0 ist. $E \in L(\mathbb{R}^d)$ sei ein linearer Operator. Seine Eigenwerte besitzen Realteile a_1, \dots, a_p mit $p \leq d$, die die Eigenschaft $a_p > \dots > a_1 > \frac{1}{2}$ erfüllen. Die Funktion $q : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow (0, \infty)$ ist eine Borel-messbare Funktion mit $r \mapsto q(r, u)$ ist vollständig monoton und $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r, u) = 0$ für alle $u \in S_0$. Wir bezeichnen diese Klasse von Verteilungen durch TOS_E^ρ .

Gilt zusätzlich $\lim_{r \downarrow 0} q(r, u) = 1$ für σ -fast alle $u \in S_0$, so nennen wir μ eine **proper ρ -tempered operator stabile Verteilung mit Exponent E** . In Bezeichnung $pTOS_E^\rho$.

Bemerkung 3.1.3. Falls $\lim_{r \downarrow 0} q(r, u) < \infty$, ist das Maß definiert durch (3.1) ein Lévy-Maß. Im Fall $\lim_{r \downarrow 0} q(r, u) = \infty$ müssen wir zusätzliche Voraussetzungen an ρ , an die Realteile der Eigenwerte von E und an die Funktion q stellen, damit das durch (3.1) definierte Maß ein Lévy-Maß ist. Eine allgemeine Aussage über solcher Voraussetzungen gibt es nicht.

Bemerkung 3.1.4.

- (i) Die Funktion q heißt **die Tempering-Funktion des Lévy-Maßes** ϕ .
- (ii) Für eine vollständig monotone Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ existiert ein Maß ϑ auf $(0, \infty)$, so dass

$$f(r) = \int_0^\infty e^{-rs} \vartheta(ds).$$

Den Beweis findet man in [9] auf Seite 439 oder in [26] Theorem 1.4 auf Seite 3.

- (iii) $f(0^+) = \vartheta(0, \infty) = 1$ genau dann, wenn ϑ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Wegen Bemerkung 3.1.4 können wir die Tempering-Funktion q wie folgt darstellen

$$q(r^\rho, u) = \int_0^\infty e^{-r^\rho s} Q(ds|u). \quad (3.2)$$

Dabei ist $\{Q(\cdot|u)\}_{u \in S_0}$ eine messbare Familie von Borelmaßen auf $(0, \infty)$, d. h. $Q(B|u)$ ist messbar in u für jede Menge $B \in \mathcal{B}((0, \infty))$. Eine Garantie dafür, dass die Familie messbar ist, gibt Remark 3.2 in [1]. Im Fall einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung sind $Q(\cdot|u)$ nach Bemerkung 3.1.4 Wahrscheinlichkeitsmaße für σ -fast alle $u \in S_0$ (äquivalent zu $q(0^+, u) = 1$ für σ -fast alle $u \in S_0$).

Bemerkung 3.1.5. Wegen der Darstellung (3.2) der Funktion q folgt, dass die Tails des Lévy-Maßes ϕ für wachsende ρ schneller gegen Null gehen. Deshalb kontrolliert ρ die Geschwindigkeit, mit der die Masse der Tails des Lévy-Maßes geändert wird.

Beispiel 3.1.6. Die p -tempered α -stabilen Verteilungen (TS_α^p Verteilungen) mit $p > 0$, $\alpha \in (0, 2)$ und Tempering-Funktion $\alpha q(r, u)$ im Artikel [10] gehören zu TOS_E^ρ Verteilungen mit $E = \frac{1}{\alpha}I$, $\rho = \frac{p}{\alpha}$ und Tempering-Funktion $q(r, u)$, denn es gilt für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \alpha \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(ru) q(r^\rho, u) r^{-\alpha-1} dr \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^{\frac{1}{\alpha}} u) q(s^{\frac{p}{\alpha}}, u) s^{-2} ds \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) q(s^\rho, u) s^{-2} ds \sigma(du). \end{aligned}$$

Im Folgenden definieren wir zwei Maße, mit deren Hilfe wir dem Lévy-Maß ϕ eine Darstellung geben, die die Beweise erleichtert.

Definition 3.1.7. Sei Q ein Borelmaß auf Γ , das für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ durch

$$Q(A) := \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) Q(dr|u) \sigma(du) \quad (3.3)$$

definiert ist, wobei $Q(\cdot|u)$ und σ wie oben gegeben sind. Wir definieren weiter das Borelmaß R in Γ durch

$$R(A) := \int_\Gamma 1_A \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho} E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx), \quad A \in \Gamma \quad (3.4)$$

Lemma 3.1.8. Im Fall einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung ist das Maß Q in (3.3) endlich. Die Umkehrung gilt auch.

Beweis Da $Q(\cdot|u)$ Wahrscheinlichkeitsmaße für σ -fast alle $u \in S_0$ sind, gilt

$$\begin{aligned} Q(\Gamma) &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_\Gamma(r^E u) Q(dr|u) \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty Q(dr|u) \sigma(du) \\ &= \sigma(S_0). \end{aligned}$$

Damit folgt nach Voraussetzungen, dass Q ein endliches Maß auf Γ ist. Sei jetzt Q ein endliches Maß. Q hat die Polardarstellung

$$Q(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) Q'(dr|u) \sigma'(du)$$

für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $\sigma'(S_0) < \infty$. Daraus folgt $Q'(\cdot|u) < \infty$ für σ -fast alle $u \in S_0$. Nach Eigenschaften der Polardarstellung können wir $Q(\cdot|u) = \frac{Q'(\cdot|u)}{Q'((0,\infty)|u)}$ und $\sigma(\cdot) = Q'((0,\infty)|u) \sigma'(\cdot)$ wählen. Damit besitzt Q die Polardarstellung (3.3) mit $\sigma(S_0) < \infty$ und $Q(\cdot|u)$ sind Wahrscheinlichkeitsmaße für σ -fast alle $u \in S_0$. Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.1.9. Seien Q bzw. R die Maße in (3.3) bzw. (3.4). Dann gilt

$$\int_\Gamma F(x) R(dx) = \int_\Gamma F \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho} E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx) \quad (3.5)$$

für alle messbare Funktionen F .

Beweis durch Algebraische Induktion:

Schritt 1: Sei $F(x) = 1_A(x)$ für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$. Dann gilt wegen (3.4)

$$\int_\Gamma 1_A(x) R(dx) = R(A) = \int_\Gamma 1_A \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho} E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx).$$

Schritt 2: Sei $\Xi = \left\{ F = \sum_{i=1}^n \beta_i 1_{A_i} : \beta_i \in \mathbb{R}^+, A_i \in \mathcal{B}(\Gamma) \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } n \in \mathbb{N} \right\}$ die Menge aller Elementarfunktionen. Dann folgt aus der Linearität des Integrals

und Schritt 1

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F(x)R(dx) &= \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n \beta_i 1_{A_i}(x)R(dx) = \sum_{i=1}^n \beta_i \int_{\Gamma} 1_{A_i}(x)R(dx) \\
&= \sum_{i=1}^n \beta_i \int_{\Gamma} 1_{A_i} \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx) \\
&= \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n \beta_i 1_{A_i} \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx) \\
&= \int_{\Gamma} F \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx).
\end{aligned}$$

Schritt 3: Sei F eine positive messbare Funktion.

Dann existiert eine Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Xi$ mit $F_n \uparrow F$ für $n \rightarrow \infty$. Mit Beppo-Levi und Schritt 2 folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F(x)R(dx) &= \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)R(dx) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} F_n(x)R(dx) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} F_n \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx) \\
&= \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx) \\
&= \int_{\Gamma} F \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx).
\end{aligned}$$

Schritt 4: folgt aus Schritt 3 und der Tatsache, dass $F = F^+ - F^-$ ist. \square

Wir können auch mit einer einfachen Transformation das Maß Q durch R darstellen.

Lemma 3.1.10. Für das Maß Q in (3.3) und das Maß R in (3.4) gilt für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$

$$Q(A) = \int_{\Gamma} 1_A \left(\tau(x)^{-\rho E} l(x) \right) \tau(x) R(dx). \quad (3.6)$$

Beweis Für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ setzen wir $F(x) = 1_A \left(\tau(x)^{-\rho E} l(x) \right) \tau(x)$ in Lemma 3.1.9, so folgt aus der Eigenschaften von $\tau(x)$ und $l(x)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} F(x)R(dx) \\
&= \int_{\Gamma} F \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx) \\
&= \int_{\Gamma} 1_A \left(\tau \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right)^{-\rho E} l \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right) \right) \tau \left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x) \right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx) \\
&= \int_{\Gamma} 1_A \left(\tau(x)^E l(x) \right) Q(dx) \\
&= \int_{\Gamma} 1_A(x) Q(dx) = Q(A)
\end{aligned}$$

\square

Folgendes Lemma gibt die Polardarstellung des Maßes R in Abhängigkeit von den Maßen $Q(\cdot|u)$ und σ an.

Lemma 3.1.11. *Seien Q bzw. R die Maße in (3.3) bzw. (3.4). Dann gilt*

$$R(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^{-\frac{1}{\rho}E}u)r^{\frac{1}{\rho}}Q(dr|u)\sigma(du) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}(\Gamma). \quad (3.7)$$

Beweis Aus der Definitionen von Q und R sowie der Tatsache, dass $\tau(r^Eu) = r$ und $l(r^Eu) = u$ für alle $r > 0$ und alle $u \in S_0$ sind, folgt für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} R(A) &= \int_{\Gamma} 1_A\left(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E}l(x)\right)\tau(x)^{\frac{1}{\rho}}Q(dx) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A\left(\tau(r^Eu)^{-\frac{1}{\rho}E}l(r^Eu)\right)\tau(r^Eu)^{\frac{1}{\rho}}Q(dr|u)\sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^{-\frac{1}{\rho}E}u)r^{\frac{1}{\rho}}Q(dr|u)\sigma(du). \end{aligned}$$

□

Wir werden sehen, dass das Maß R eine große Rolle in der Charakterisierung des Lévy-Maßes einer TOS_E^ρ Verteilung und in den Beweisen ihrer Eigenschaften spielt. Folgender Satz ist die Grundlage für die anderen Ergebnisse in diesem Abschnitt.

Satz 3.1.12. *Sei $\rho > 0$. Das Lévy-Maß ϕ einer TOS_E^ρ Verteilung besitzt folgende Darstellung*

$$\phi(A) = \rho^{-1} \int_{\Gamma} \int_0^\infty 1_A(t^{\frac{1}{\rho}E}x)t^{-1-\frac{1}{\rho}}e^{-t}dtR(dx) \quad (3.8)$$

oder äquivalent

$$\phi(A) = \int_{\Gamma} \int_0^\infty 1_A(t^E x)t^{-2}e^{-t^\rho}dtR(dx) \quad (3.9)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$, wobei R ein eindeutiges Maß auf Γ mit

$$\int_{\Gamma} \left(\tau(x)^{2(a_p+\delta')} \wedge \tau(x)\right) R(dx) < \infty \quad \text{für alle } \delta' > 0 \text{ ist.} \quad (3.10)$$

Umgekehrt ist R ein Maß mit

$$\int_{\Gamma} \left(\tau(x)^{2(a_1-\delta)} \wedge \tau(x)\right) R(dx) < \infty \quad \text{für geeignet kleines } \delta > 0, \quad (3.11)$$

so stellt (3.8) oder (3.9) das Lévy-Maß einer TOS_E^ρ Verteilung dar. ϕ ist das Lévy-Maß einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung genau dann, wenn

$$\int_{\Gamma} \tau(x)R(dx) < \infty. \quad (3.12)$$

Beweis

Da die Realteile a_1, \dots, a_p mit $p \leq d$ der Eigenwerte von $E \in L(\mathbb{R}^d)$ die Eigenschaft $\frac{1}{2} < a_1 < \dots < a_p$ erfüllen, existieren $\delta > 0$ und $\delta' > 0$, so dass folgendes gilt:

$$\frac{1}{2} < a_1 - \delta < a_1 < \dots < a_p < a_p + \delta'$$

In der Hinrichtung zeigen wir zunächst, dass (3.8) und (3.9) gelten, wenn das Maß R die Darstellung (3.4) hat. Die Darstellung von q in (3.2), die Eigenschaften der verallgemeinerten Polarkoordinaten und Lemma 3.1.9 liefern

$$\begin{aligned}
\phi(A) &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) q(r^\rho, u) r^{-2} dr \sigma(du) \\
&= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) \int_0^\infty e^{-r^\rho s} Q(ds|u) r^{-2} dr \sigma(du) \\
&= \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_A(r^E u) e^{-r^\rho s} r^{-2} dr Q(ds|u) \sigma(du) \\
&= \rho^{-1} \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_A\left(t^{\frac{1}{\rho}E} s^{-\frac{1}{\rho}E} u\right) t^{-1-\frac{1}{\rho}} e^{-t} s^{\frac{1}{\rho}} dt Q(ds|u) \sigma(du) \\
&= \rho^{-1} \int_0^\infty \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A\left(t^{\frac{1}{\rho}E} s^{-\frac{1}{\rho}E} u\right) s^{\frac{1}{\rho}} Q(ds|u) \sigma(du) t^{-1-\frac{1}{\rho}} e^{-t} dt \\
&= \rho^{-1} \int_0^\infty \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A\left(t^{\frac{1}{\rho}E} \tau(s^E u)^{-\frac{1}{\rho}E} l(s^E u)\right) \tau(s^E u)^{\frac{1}{\rho}} Q(ds|u) \sigma(du) \frac{e^{-t} dt}{t^{1+\frac{1}{\rho}}} \\
&= \rho^{-1} \int_0^\infty \int_\Gamma 1_A\left(t^{\frac{1}{\rho}E} \tau(x)^{-\frac{1}{\rho}E} l(x)\right) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx) t^{-1-\frac{1}{\rho}} e^{-t} dt \quad (3.13) \\
&= \rho^{-1} \int_0^\infty \int_\Gamma 1_A\left(t^{\frac{1}{\rho}E} x\right) R(dx) t^{-1-\frac{1}{\rho}} e^{-t} dt \\
&= \rho^{-1} \int_\Gamma \int_0^\infty 1_A\left(t^{\frac{1}{\rho}E} x\right) t^{-1-\frac{1}{\rho}} e^{-t} dt R(dx) \\
&= \int_\Gamma \int_0^\infty 1_A(y^E x) e^{-y^\rho} y^{-2} dy R(dx)
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus der Substitution $y = t^{\frac{1}{\rho}}$. Wir werden jetzt (3.10) mithilfe von (3.9) wie folgt zeigen: die Eigenschaften des Lévy-Maßes, Lemma 2.3.1 und die Monotonie der Funktion $t \mapsto e^{-t^\rho}$ liefern

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_{\{\|x\|_0 \leq 1\}} \|x\|_0^2 \phi(dx) \\
&\geq C \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} \phi(dx) \\
&= C \int_\Gamma \int_0^\infty 1_{\{\tau(t^E x) \leq 1\}} \tau(t^E x)^{2(a_p + \delta')} t^{-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&= C \int_\Gamma \tau(x)^{2(a_p + \delta')} \int_0^{\tau(x)^{-1}} t^{2(a_p + \delta') - 2} e^{-t^\rho} dt R(dx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \left[\int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} \int_0^1 t^{2(a_p + \delta') - 2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \right. \\
&+ \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} \int_1^{\tau(x)^{-1}} t^{2(a_p + \delta') - 2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&+ \left. \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} \int_0^{\tau(x)^{-1}} t^{2(a_p + \delta') - 2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \right] \\
&\geq C \left[\int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} \int_0^1 t^{2(a_p + \delta') - 2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \right. \\
&+ \left. \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} \int_0^{\tau(x)^{-1}} t^{2(a_p + \delta') - 2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \right] \\
&\geq \frac{C e^{-1}}{2(a_p + \delta') - 1} \left[\int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} R(dx) + \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) R(dx) \right] \\
&= \frac{C e^{-1}}{2(a_p + \delta') - 1} \int_{\Gamma} \left(\tau(x)^{2(a_p + \delta')} \wedge \tau(x) \right) R(dx)
\end{aligned}$$

Um die Eindeutigkeit von R zu zeigen, nehmen wir an, dass zwei Maße R_1 und R_2 existieren und die Eigenschaft (3.9) erfüllen. Dann erfüllen R_1 und R_2 auch die Eigenschaft (3.10). Definiere zwei Maße Q_j durch (3.6) für $j = 1, 2$. Die Polardarstellung von Q_j sei für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ gegeben durch

$$Q_j(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) Q_j(dr|u) \sigma(du) \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Dabei ist σ ein endliches Maß auf der Einheitskugel S_0 und $\{Q_j(\cdot|u)\}_{u \in S_0}$ eine messbare Familie von Borelmaßen auf $(0, \infty)$.

(3.10) und (3.7) implizieren

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_{\Gamma} \left(\tau(x)^{2(a_p + \delta')} \wedge \tau(x) \right) R_j(dx) \\
&= \int_{S_0} \int_0^\infty \left(\tau(r^{-\frac{1}{\rho} E} u)^{2(a_p + \delta')} \wedge \tau(r^{-\frac{1}{\rho} E} u) \right) r^{\frac{1}{\rho}} Q_j(dr|u) \sigma(du) \\
&= \int_{S_0} \int_0^\infty \left(r^{\frac{1}{\rho}(1-2(a_p + \delta'))} \wedge 1 \right) Q_j(dr|u) \sigma(du).
\end{aligned}$$

Daraus folgt für σ -fast alle $u \in S_0$

$$\int_0^\infty \left(r^{\frac{1}{\rho}(1-2(a_p + \delta'))} \wedge 1 \right) Q_j(dr|u) < \infty. \quad (3.14)$$

Da $e^{-rs} \leq 1$ für $0 < r \leq 1$ und

$$\begin{aligned}
e^{-rs} &= r^{\frac{1}{\rho}(1-2(a_p + \delta'))} r^{\frac{1}{\rho}(2(a_p + \delta') - 1)} e^{-rs} \\
&\leq K r^{\frac{1}{\rho}(1-2(a_p + \delta'))}
\end{aligned}$$

mit $K = \sup_{r \geq 1} r^{\frac{1}{\rho}(2(a_p + \delta') - 1)} e^{-rs}$ für alle $s > 0$ gilt, folgt aus (3.14) für σ -fast alle $u \in S_0$

$$\begin{aligned}
q_j(s, u) &= \int_0^\infty e^{-rs} Q_j(dr|u) \\
&\leq \int_0^1 Q_j(dr|u) + K \int_1^\infty r^{\frac{1}{\rho}(1-2(a_p+\delta'))} Q_j(dr|u) \\
&\leq (1 \vee K) \int_0^\infty \left(1 \wedge r^{\frac{1}{\rho}(1-2(a_p+\delta'))}\right) Q_j(dr|u) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

d. h. die Laplace-Transformierte von $Q_j(\cdot|u)$ existiert für σ -fast alle $u \in S_0$ und alle $s > 0$. Damit ist die Funktion $q_j(\cdot, u) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ wegen der Eigenschaften der Laplace-Transformierten vollständig monoton. Da R_j die Eigenschaft (3.9) erfüllt, gilt analog zur Berechnung am Anfang des Beweises

$$\int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) q_j(s^\rho, u) s^{-2} ds \sigma(du) = \phi(A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ und $j = 1, 2$. Aus der Eindeutigkeit der Polardarstellung von ϕ und der Stetigkeit von $q_j(\cdot, u)$ folgt, dass $q_1(s, u) = q_2(s, u)$ für alle $s > 0$ und σ -fast alle $u \in S_0$ gilt. Der Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte liefert dann $Q_1(\cdot|u) = Q_2(\cdot|u)$ für σ -fast alle $u \in S_0$ und damit $Q_1 = Q_2$. Somit gilt auch $R_1 = R_2$.

In der Rückrichtung zeigen wir zuerst, dass ϕ ein Lévy-Maß ist, falls das Maß R die Eigenschaft (3.11) erfüllt. Nochmal mit Lemma 2.3.1 folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\{\|x\|_0 \leq 1\}} \|x\|_0^2 \phi(dx) &\leq C \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_1-\delta)} \phi(dx) \\
&= C \int_\Gamma \int_0^\infty 1_{\{\tau(t^E x) \leq 1\}} \tau(t^E x)^{2(a_1-\delta)} e^{-t^\rho} t^{-2} dt R(dx) \\
&= C \int_\Gamma \tau(x)^{2(a_1-\delta)} \int_0^{\tau(x)^{-1}} t^{2(a_1-\delta)-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&\leq C \left[\int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_1-\delta)} \int_0^\infty t^{2(a_1-\delta)-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^{2(a_1-\delta)} \int_0^{\tau(x)^{-1}} t^{2(a_1-\delta)-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \right] \\
&= C \left[\rho^{-1} \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_1-\delta)} \int_0^\infty y^{\frac{1}{\rho}(2(a_1-\delta)-1)-1} e^{-y} dy R(dx) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^{2(a_1-\delta)} \int_0^{\tau(x)^{-1}} t^{2(a_1-\delta)-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left[\rho^{-1} \Gamma \left(\frac{2(a_1 - \delta) - 1}{\rho} \right) \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_1 - \delta)} R(dx) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2(a_1 - \delta) - 1} \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) R(dx) \right] \\
&\leq C \int_{\Gamma} \left(\tau(x)^{2(a_1 - \delta)} \wedge \tau(x) \right) R(dx) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$, die entsprechend geändert wird. Desweiteren gilt mit $K = \sup_{t \geq 1} t^{2(a_1 - \delta) - 1} e^{-t^\rho}$ und $e^{-t^\rho} \leq 1$ für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\{\|x\|_0 > 1\}} \phi(dx) &= \int_{\{\tau(x) > 1\}} \phi(dx) \\
&= \int_{\Gamma} \int_0^\infty 1_{\{\tau(t^E x) > 1\}} t^{-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&= \int_{\Gamma} \int_{\tau(x)^{-1}}^\infty t^{-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&= \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \int_{\tau(x)^{-1}}^\infty t^{-2(a_1 - \delta) - 1} t^{2(a_1 - \delta) - 1} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&\quad + \int_{\{\tau(x) > 1\}} \int_{\tau(x)^{-1}}^\infty t^{-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&\leq \frac{K}{2(a_1 - \delta)} \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_1 - \delta)} R(dx) + \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) R(dx) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, dass ϕ die Darstellung (3.1) besitzt.

Wir definieren Q durch (3.6). Die Polardarstellung von Q ist von der Form

$$Q(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) Q(dr|u) \sigma(du)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $\sigma(S_0) < \infty$. Dann definieren wir $q(r, u) = \int_0^\infty e^{-rs} Q(ds|u)$, d. h.

$$q(r^\rho, u) = \int_0^\infty e^{-r^\rho s} Q(ds|u).$$

Aus der Berechnung am Anfang dieses Beweis folgt dann

$$\phi(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) q(r^\rho, u) r^{-2} dr \sigma(du).$$

Wir müssen noch die letzte Behauptung zeigen. Die Definition des Maßes R liefert

$$\int_{\Gamma} \tau(x) R(dx) = \int_{\Gamma} \tau(\tau(x)^{-\frac{1}{\rho} E} l(x)) \tau(x)^{\frac{1}{\rho}} Q(dx) = \int_{\Gamma} Q(dx) = Q(\Gamma).$$

Die Behauptung folgt dann mit Lemma 3.1.8 □

Definition 3.1.13. Das eindeutige Maß R in (3.8) oder (3.9) heißt **Rosiński-Maß** der dazugehörigen TOS_E^ρ Verteilung.

Lemma 3.1.14. Sei $\rho > 0$. ϕ sei das Lévy-Maß einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung und σ das Spektralmaß. Für jede Menge $B \in \mathcal{B}(S_0)$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} t\phi(\{x \in \Gamma : \tau(x) > t, l(x) \in B\}) = \sigma(B). \quad (3.15)$$

Beweis Es gilt nach dem Eigenschaften der Tempering-Funktion q

$$\begin{aligned} & t\phi(\{x \in \Gamma : \tau(x) > t, l(x) \in B\}) \\ &= t \int_B \int_t^\infty q(r^\rho, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &= t \int_B \int_t^\infty \int_0^\infty e^{-r^\rho s} Q(ds|u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &= t \int_B \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-r^\rho s} \frac{dr}{r^2} Q(ds|u) \sigma(du) \\ &= \int_B \int_0^\infty \left(\rho^{-1} t s^{\frac{1}{\rho}} \int_{t^\rho s}^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{\rho}-1} dx \right) Q(ds|u) \sigma(du). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Substitution $x = r^\rho s$. Wir setzen

$$f_\rho(t, s) = \rho^{-1} t s^{\frac{1}{\rho}} \int_{t^\rho s}^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{\rho}-1} dx.$$

Der Integrand läuft für $x \rightarrow 0$ gegen Unendlich, deshalb folgt aus der Stetigkeit von $t \mapsto t^\rho s$ und des Integranden sowie der Regel von L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f_\rho(t, s) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho^{-1} s^{\frac{1}{\rho}} \int_{t^\rho s}^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{\rho}-1} dx}{t^{-1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^{-2} e^{-t^\rho s}}{-t^{-2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} e^{-t^\rho s} = 1. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\rho(t, s)}{\partial t} &= \rho^{-1} s^{\frac{1}{\rho}} \left[\int_{t^\rho s}^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{\rho}-1} dx - \rho t^{-1} s^{-\frac{1}{\rho}} e^{-t^\rho s} \right] \\ &= \rho^{-1} s^{\frac{1}{\rho}} \left[\int_{t^\rho s}^\infty (e^{-x} - e^{-t^\rho s}) x^{-\frac{1}{\rho}-1} dx \right] \leq 0 \end{aligned}$$

für alle $s \geq 0$, da die Abbildung $x \mapsto e^{-x}$ monoton fallend ist. Damit ist auch $f_\rho(t, s)$ monoton fallend für alle $s \geq 0$. Der monotone Konvergenzsatz liefert die Behauptung. \square

Im Fall einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung mit gegebenem Exponent E für festes $\rho > 0$ folgt aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes die Eindeutigkeit von σ . Damit ist die Funktion q durch die verallgemeinerte Polardarstellung von ϕ für σ -fast alle $u \in S_0$ bestimmt. Für $\rho > 0$ fest kann ϕ durch den gegebenen Exponent und das endliche Maß Q eindeutig charakterisiert werden, da das Maß Q durch das Maß σ und die Funktion q festgelegt ist. Nach (3.13) ist die Darstellung von ϕ durch Q kompliziert, deshalb haben wir das Maß R vorgestellt.

Korollar 3.1.15. Sei $\rho > 0$. Seien X_1 bzw. X_2 unabhängige TOS_E^ρ Zufallsvektoren in \mathbb{R}^d mit Rosiński-Maß R_1 bzw. R_2 und Shift $b_1 \in \mathbb{R}^d$ bzw. $b_2 \in \mathbb{R}^d$. Sei ϕ_j das Lévy-Maß von X_j mit der Darstellung (3.9) für $j = 1, 2$. Sei weiter $A \in L(\mathbb{R}^d)$ ein linearer Operator, der mit r^E für alle $r > 0$ kommutiert. Dann gilt

(i) $X_1 + X_2$ besitzt den Shift $b_1 + b_2$ und das Rosiński-Maß $R_1 + R_2$.

(ii) AX_1 hat den Shift b und das Rosiński-Maß (AR_1) . Dabei ist

$$b = Ab_1 + \int_{\Gamma} x 1_{\{0 < \|x\|_0 < 1\}}(A\phi_1)(dx) - \int_{\Gamma} Ax 1_{\{0 < \|x\|_0 < 1\}}\phi_1(dx).$$

Beweis

(i) $X_1 + X_2$ besitzt offensichtlich den Shift $b_1 + b_2$ und das Lévy-Maß $\phi_1 + \phi_2$. Damit gilt für alle $B \in \mathcal{B}(\Gamma)$

$$(\phi_1 + \phi_2)(B) = \int_{\Gamma} \int_0^{\infty} 1_B(r^E x) e^{-r^\rho} r^{-2} dr (R_1 + R_2)(dx).$$

(ii) AX_1 besitzt den Shift b mit der obigen Darstellung und das Lévy-Maß $(A\phi_1)$. Es folgt dann für alle $B \in \mathcal{B}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} (A\phi_1)(B) &= \int_{\Gamma} \int_0^{\infty} 1_{A^{-1}B}(r^E x) e^{-r^\rho} r^{-2} dr R_1(dx) \\ &= \int_{\Gamma} \int_0^{\infty} 1_B(r^E x) e^{-r^\rho} r^{-2} dr (AR_1)(dx). \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. \square

Folgendes Korollar zeigt den Unterschied zwischen $pTOS_E^\rho$ und TOS_E^ρ , indem wir das Verhalten der Tailfunktionen der Lévy-Maße in der Nähe von Null betrachten.

Korollar 3.1.16. Sei $\rho > 0$ und sei ϕ das Lévy-Maß einer TOS_E^ρ gegeben durch (3.9). Dann ist für $s > 0$ die Funktion $s \mapsto s\phi\{\tau(x) > s\}$ fallend mit

$$\lim_{s \downarrow 0} s\phi\{\tau(x) > s\} = \int_{\Gamma} \tau(x) R(dx)$$

und

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\phi\{\tau(x) > s\} = 0.$$

Damit ist ϕ das Lévy-Maß einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung genau dann, wenn

$$\lim_{s \downarrow 0} s\phi\{\tau(x) > s\} < \infty.$$

Beweis Wegen $\tau(t^E x) = t\tau(x)$ folgt für $\rho > 0$

$$\begin{aligned} s\phi\{\tau(x) > s\} &= s \int_{\Gamma} \int_0^{\infty} 1_{\{\tau(t^E x) > s\}} e^{-t^\rho} t^{-2} dt R(dx) \\ &= s \int_{\Gamma} \int_{s\tau(x)^{-1}}^{\infty} e^{-t^\rho} t^{-2} dt R(dx) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} e^{-(sy)^\rho} y^{-2} dy R(dx). \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ergibt sich aus der Substitution $y = \frac{t}{s}$.

Damit ist $s \mapsto s\phi\{\tau(x) > s\}$ fallend (gegen 0). Es gilt

$$s\phi\{\tau(x) > s\} = \int_{\Gamma} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} e^{-(sy)^\rho} y^{-2} dy R(dx) = \int_{\Gamma} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} f_s(\rho, y) dy R(dx)$$

Für $s \rightarrow \infty$ konvergiert $f_s(\rho, y) = y^{-2} e^{-(sy)^\rho}$ gegen 0 und für alle $s \geq 1$ gilt

$$f_s(\rho, y) \leq f_1(\rho, y)$$

Da ϕ durch (3.9) definiert ist, erfüllt das Maß R die Eigenschaft (3.10). Damit folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} f_1(\rho, y) dy R(dx) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} e^{-y^\rho} y^{-2} dy R(dx) \\ &= \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} y^{-2(a_p + \delta') - 1} y^{2(a_p + \delta') - 1} e^{-y^\rho} dy R(dx) \\ &+ \int_{\{\tau(x) > 1\}} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} e^{-y^\rho} y^{-2} dy R(dx) \\ &\leq \frac{K}{2(a_p + \delta')} \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} R(dx) + \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) R(dx) \\ &< \infty \quad \text{wegen (3.10)}. \end{aligned}$$

Dabei ist $K = \sup_{y \geq 1} y^{2(a_p + \delta') - 1} e^{-y^\rho}$. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\phi\{\tau(x) > s\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} y^{-2} e^{-(sy)^\rho} dy R(dx) = 0$$

und aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\lim_{s \downarrow 0} s\phi\{\tau(x) > s\} = \lim_{s \downarrow 0} \int_{\Gamma} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} y^{-2} e^{-(sy)^\rho} dy R(dx) = \int_{\Gamma} \tau(x) R(dx).$$

Außerdem ist nach Satz 3.1.12 ϕ das Lévy-Maß einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung genau dann, wenn $\int_{\Gamma} \tau(x) R(dx) < \infty$ und das ist äquivalent zu

$$\lim_{s \downarrow 0} s\phi\{\tau(x) > s\} < \infty.$$

□

Wir werden jetzt zeigen, dass TOS_E^ρ Verteilungen Momente beliebiger Ordnung besitzen können. Diese hängen von dem Rosiński-Maß R ab.

Satz 3.1.17. *Sei $\rho > 0$ fest. Sei μ eine TOS $_E^\rho$ Verteilung mit Lévy-Maß ϕ definiert durch (3.9). Dann gilt*

$$(i) \int_{\mathbb{R}^d} \tau(x)^b \mu(dx) < \infty \text{ für } 0 < b < 1.$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}^d} \tau(x) \mu(dx) < \infty \text{ genau dann, wenn } \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \ln(\tau(x)) R(dx) < \infty.$$

$$(iii) \int_{\mathbb{R}^d} \tau(x)^b \mu(dx) < \infty \text{ genau dann, wenn } \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^b R(dx) < \infty \text{ für } b > 1.$$

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.1.18. *Die Abbildungen $g_1(x) = \max\{\tau(x), 1\}$ und $g_2(x) = \max\{\tau(x)^b, 1\}$ für $b > 0$ sind für $x \in \mathbb{R}^d$ im Sinne folgender Definition submultiplikativ.*

Definition 3.1.19. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ heißt **submultiplikativ**, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $f(x + y) \leq C f(x) f(y)$.*

Beweis von Lemma 3.1.18

Wir zeigen zunächst, dass g_1 submultiplikativ ist, indem wir folgende Fälle betrachten. Nach Lemma 2.3.2 existiert eine Konstante $K \geq 1$ mit

$$\tau(x + y) \leq K(\tau(x) + \tau(y)).$$

Fall 1. Wenn $\tau(x) > 1$ und $\tau(y) > 1$ sind, dann folgt $g_1(x) = \tau(x)$ und $g_1(y) = \tau(y)$.

- $\tau(x + y) \leq 1$, dann gilt

$$g_1(x + y) = 1 \leq \tau(x)\tau(y) \leq 2K\tau(x)\tau(y) = 2Kg_1(x)g_1(y).$$

- $\tau(x + y) > 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} g_1(x + y) &= \tau(x + y) \leq K(\tau(x) + \tau(y)) \\ &\leq K(\tau(x)\tau(y) + \tau(y)\tau(x)) \\ &= 2K\tau(x)\tau(y) = 2Kg_1(x)g_1(y). \end{aligned}$$

Fall 2. Wenn $\tau(x) \leq 1$ und $\tau(y) > 1$ sind, dann folgt $g_1(x) = 1$ und $g_1(y) = \tau(y)$.

- $\tau(x + y) \leq 1$, dann gilt

$$g_1(x + y) = 1 \leq 1 \cdot \tau(y) = g_1(x)g_1(y) \leq 2Kg_1(x)g_1(y).$$

- $\tau(x + y) > 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} g_1(x + y) &= \tau(x + y) \leq K(\tau(x) + \tau(y)) \\ &\leq K(1 + \tau(y)) \\ &\leq 2K\tau(y) = 2Kg_1(x)g_1(y). \end{aligned}$$

Fall 3. Für den Fall $\tau(x) > 1$ und $\tau(y) \leq 1$ geht der Beweis analog zum Fall 2.

Fall 4. Wenn $\tau(x) \leq 1$ und $\tau(y) \leq 1$ sind, dann folgt $g_1(x) = 1$ und $g_1(y) = 1$.

- $\tau(x+y) \leq 1$, dann gilt

$$g_1(x+y) = 1 = g_1(x)g_1(y) \leq 2K g_1(x)g_1(y).$$

- $\tau(x+y) > 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} g_1(x+y) &= \tau(x+y) \leq K(\tau(x) + \tau(y)) \\ &\leq K(1+1) = 2K \\ &= 2K g_1(x)g_1(y). \end{aligned}$$

Für $b > 0$ gilt

$$g_2(x) = \max\{\tau(x)^b, 1\} = \max\{\tau(x)^b, 1^b\} = (\max\{\tau(x), 1\})^b = g_1(x)^b.$$

Damit gilt mit dem ersten Teil dieses Beweises

$$g_2(x+y) = g_1(x+y)^b \leq 2^b K^b g_1(x)^b g_1(y)^b = 2^b K^b g_2(x)g_2(y).$$

□

Beweis von Satz 3.1.17

Da die Funktion g_2 stetig, lokal beschränkt und submultiplikativ ist, liefert Theorem 25.3 auf Seite 159 aus dem Buch [25] für $b > 0$ die Äquivalenz von

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau(x)^b \mu(dx) < \infty$$

und

$$\int_{\{\tau(x) \geq 1\}} \tau(x)^b \phi(dx) < \infty.$$

Da ϕ die Darstellung (3.9) besitzt, muss das Maß R die Eigenschaft (3.10) erfüllen. Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\{\tau(x) \geq 1\}} \tau(x)^b \phi(dx) &= \int_{\Gamma} \int_0^{\infty} 1_{\{\tau(t^E x) \geq 1\}} \tau(t^E x)^b t^{-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} \tau(x)^b t^{b-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\ &= \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^b \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} t^{b-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\ &\quad + \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^b \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} t^{b-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Mit $K = \sup_{t \geq 1} t^{2(a_p + \delta') + b - 1} e^{-t^\rho}$ für alle $b > 0$ gilt wegen (3.10)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^b \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} t^{-2(a_p + \delta') - 1} t^{2(a_p + \delta') + b - 1} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\ &\leq K \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^b \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} t^{-2(a_p + \delta') - 1} dt R(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{2(a_p + \delta')} \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta') + b} R(dx) \\
&\leq \frac{K}{2(a_p + \delta')} \int_{\{\tau(x) \leq 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} R(dx) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

D. h. die Existenz von $\int_{\{\tau(x) \geq 1\}} \tau(x)^b \phi(dx)$ hängt nur von I_2 ab. Daher betrachten wir folgende Fälle:

(i) $0 < b < 1$: Da $e^{-t^\rho} \leq 1$ für alle $t \geq 0$ ist, gilt wegen (3.10)

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^b \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} t^{b-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&\leq \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^b \int_{\tau(x)^{-1}}^{\infty} t^{b-2} dt R(dx) \\
&= \frac{1}{1-b} \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) R(dx) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

(ii) $b = 1$: Es gilt $e^{-t^\rho} \leq 1$ für alle $t \geq 0$ und $t^{-1} \leq 1$ für alle $t \geq 1$. Damit folgt einerseits

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \int_{\tau(x)^{-1}}^1 t^{-1} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&+ \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \int_1^{\infty} t^{-1} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&\leq \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \int_{\tau(x)^{-1}}^1 t^{-1} dt R(dx) + \int_1^{\infty} e^{-t^\rho} dt \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) R(dx) \\
&= \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \ln(\tau(x)) R(dx) + \rho^{-1} \int_1^{\infty} y^{\frac{1}{\rho}-1} \frac{dy}{e^y} \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) R(dx) \\
&\leq \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \ln(\tau(x)) R(dx) + \rho^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) R(dx).
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
I_2 &\geq \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \int_{\tau(x)^{-1}}^1 t^{-1} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\
&\geq e^{-1} \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \int_{\tau(x)^{-1}}^1 t^{-1} dt R(dx) \\
&\geq e^{-1} \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \ln(\tau(x)) R(dx).
\end{aligned}$$

Da $\int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) R(dx) < \infty$ aus der Eigenschaft (3.10) folgt, gilt $I_2 < \infty$ und damit

$$\int_{\{\tau(x) \geq 1\}} \tau(x) \phi(dx) < \infty$$

genau dann, wenn $\int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \ln(\tau(x)) R(dx) < \infty$ ist.

(iii) $b > 1$: Auf der einen Seite gilt

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x)^b \int_0^\infty t^{b-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\ &= \rho^{-1} \int_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x)^b \int_0^\infty y^{\frac{1}{\rho}(b-1)-1} e^{-y} dy R(dx) \\ &= \rho^{-1} \Gamma\left(\frac{b-1}{\rho}\right) \int_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x)^b R(dx). \end{aligned}$$

und auf der anderen Seite ist

$$\begin{aligned} I_2 &\geq \int_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x)^b \int_1^\infty t^{b-2} e^{-t^\rho} dt R(dx) \\ &= \hat{C} \int_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x)^b R(dx) \quad \text{für eine Konstante } \hat{C} > 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Korollar 3.1.20. Sei μ eine TOS_E^ρ Verteilung mit Lévy-Maß ϕ , das die Darstellung (3.9) besitzt. Dann gilt für alle (kleine) $\delta' > 0$

(i) $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^\beta \mu(dx) < \infty$ für $0 < \beta < \frac{1}{a_p}$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^{\frac{1}{a_p+\delta'}} \mu(dx) < \infty$, wenn $\int_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x) \ln(\tau(x)) R(dx) < \infty$ gilt.

(iii) Außerdem folgt $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^\beta \mu(dx) < \infty$, wenn $\int_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x)^{\beta(a_p+\delta')} R(dx) < \infty$ für $\beta > \frac{1}{a_p+\delta'}$ gilt.

Beweis Wegen Theorem 25.3 auf Seite 159 in [25] sind

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^\beta \mu(dx) < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} \|x\|_0^\beta \phi(dx) < \infty$$

äquivalent, da $x \mapsto \max\{\|x\|_0^\beta, 1\}$ stetig, lokal beschränkt und submultiplikativ ist. Desweiteren gilt mit Lemma 2.3.1 für eine Konstante $C > 0$

$$\int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} \|x\|_0^\beta \phi(dx) \leq C \int_{\{\tau(x) \geq 1\}} \tau(x)^{\beta(a_p+\delta')} \phi(dx).$$

Die Behauptung folgt dann aus Satz 3.1.17 mit $b = \beta(a_p + \delta')$. In (i) gilt die Behauptung für $0 < \beta < \frac{1}{a_p+\delta'} = \frac{1}{a_p} - \gamma < \frac{1}{a_p}$ mit $\gamma = \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_p+\delta'} > 0$. \square

Lemma 3.1.21. Sei ϕ das Lévy-Maß einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung. Falls $a_1 > 1$ ist, dann gilt

$$\int_{\{0 < \|x\|_0 \leq 1\}} \|x\|_0 \phi(dx) < \infty.$$

Beweis Da $a_1 > 1$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $a_1 - \delta > 1$. Dann folgt aus der Definition des Lévy-Maßes einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung und Lemma 2.3.1

$$\begin{aligned} \int_{\{0 < \|x\|_0 \leq 1\}} \|x\|_0 \phi(dx) &\leq \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{0 < \|r^E u\|_0 \leq 1\}} \|r^E u\|_0 \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &\leq C \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{0 < \tau(r^E u) \leq 1\}} \tau(r^E u)^{a_1 - \delta} \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &= C \int_{S_0} \int_0^1 r^{(a_1 - \delta) - 2} dr \sigma(du) < \infty \end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$. □

Folgendes Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen den Parametern einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung und den Parametern einer (t^E) operator stabilen Verteilung her.

Lemma 3.1.22. *Sei $\rho > 0$. Sei ϕ das Lévy-Maß einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung mit der Darstellung (3.1) und Rosiński-Maß R . Sei weiter ϕ_0 das Lévy-Maß einer (t^E) operator stabilen Verteilung mit der Darstellung (2.10).*

Dann gilt für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$

$$\phi_0(A) = \int_\Gamma \int_0^\infty 1_A(t^E x) t^{-2} dt R(dx). \quad (3.16)$$

Außerdem gilt für alle $B \in \mathcal{B}(S_0)$

$$\sigma(B) = \int_\Gamma 1_B(\tau(x)^{-E} x) \tau(x) R(dx). \quad (3.17)$$

Beweis Für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ folgt aus (3.7)

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \int_0^\infty 1_A(t^E x) t^{-2} dt R(dx) &= \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_A(t^E r^{-\frac{1}{\rho} E} u) t^{-2} dt r^{\frac{1}{\rho}} Q(dr|u) \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_A(s^E u) s^{-2} ds Q(dr|u) \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) s^{-2} ds \int_0^\infty Q(dr|u) \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) s^{-2} ds \sigma(du) \\ &= \phi_0(A). \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit folgt daraus, dass μ eine $pTOS_E^\rho$ Verteilung ist, und damit sind $Q(\cdot|u)$ für σ -fast alle $u \in S_0$ Wahrscheinlichkeitsmaße. Da $\tau(r^E u) = r$ für $u \in S_0$ gilt und μ eine $pTOS_E^\rho$ Verteilung ist, folgt mit (3.7) für alle $B \in \mathcal{B}(S_0)$

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma 1_B(\tau(x)^{-E} x) \tau(x) R(dx) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_B(\tau(r^{-\frac{1}{\rho} E} u)^{-E} r^{-\frac{1}{\rho} E} u) \tau(r^{-\frac{1}{\rho} E} u) r^{\frac{1}{\rho}} Q(dr|u) \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_B(u) Q(dr|u) \sigma(du) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S_0} 1_B(u) \int_0^\infty Q(dr|u) \sigma(du) \\
&= \sigma(B).
\end{aligned}$$

□

Ein Lévy-Prozess $\mathbb{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ in \mathbb{R}^d heißt TOS_E^ρ **Lévy-Prozess** bzw. $pTOS_E^\rho$ **Lévy-Prozess**, wenn $X(1)$ eine TOS_E^ρ bzw. $pTOS_E^\rho$ Verteilung besitzt. Genauso ist ein Lévy-Prozess $\mathbb{Y} = \{Y(t) : t \geq 0\}$ ein (t^E) **operator stabiler Lévy-Prozess**, falls die Verteilung von $Y(1)$ (t^E) operator stabil ist. Wir definieren weiter den **zeitreskalierten Prozess** \mathbb{X}_h (engl. the time rescaled process) durch $X_h(t) = X(ht)$ für $h > 0$ und $t \geq 0$. Wir bezeichnen mit „ \Rightarrow in $D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ “ die schwache Konvergenz von Prozessen im Raum $D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ der rechtsseitig stetigen Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit linksseitigen Limiten. Kurz gesagt, die Funktionen f , die càdlàg sind (franz.: càdlàg= continue à droite avec limites à gauche). $D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ ist mit der Skorohod-Topologie versehen.

Satz 3.1.23. Sei $\mathbb{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein TOS_E^ρ Lévy-Prozess in \mathbb{R}^d . $X(1)$ besitze das Rosiński-Maß R und die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, X(1) \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}} \right) \phi(dx) \right).$$

(i) Falls $\int_{\Gamma} \tau(x) R(dx) < \infty$ ist, dann gilt

$$h^{-E} \mathbb{X}_h - b_h \Rightarrow \mathbb{Y} \quad \text{in } D([0, \infty), \mathbb{R}^d) \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

mit

$$b_h(t) = -th \int_{\Gamma} (h^{-E} x) 1_{\{h \leq \tau(x) < 1\}} \phi(dx),$$

wobei $\mathbb{Y} = \{Y(t) : t \geq 0\}$ ein (t^E) operator stabiler Lévy-Prozess ist. Dabei besitzt die Verteilung von $Y(1)$ die charakteristische Funktion

$$\exp \left(\int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}} \right) \phi_0(dx) \right).$$

Das Lévy-Maß ϕ_0 ist von der Form (2.10). ϕ_0 bzw. σ können die Darstellung (3.16) bzw. (3.17) besitzen.

(ii) Gilt für ein $\delta' > 0$

$$\int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} R(dx) < \infty, \quad (3.19)$$

dann folgt für $h \rightarrow \infty$

$$h^{-\frac{1}{2}I} \mathbb{X}_h - b'_h \Rightarrow \mathbb{B} \quad \text{in } D([0, \infty), \mathbb{R}^d). \quad (3.20)$$

Dabei ist

$$b'_h(t) = th^{\frac{1}{2}} \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x \phi(dx)$$

und $\mathbb{B} = \{B(t) : t \geq 0\}$ eine zentrierte Brownsche Bewegung mit charakteristischer Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, B(t) \rangle}) = \exp\left(-\frac{t}{2} \int_{\Gamma} \langle y, x \rangle^2 \phi(dx)\right).$$

Beweis

(i) Wir setzen $Y(t, h) = h^{-E} X_h(t) - b_h(t) = h^{-E} X(ht) - b_h(t)$.
Es ist für $0 < h < 1$

$$\begin{aligned} b_h(1) &= -h \int_{\Gamma} (h^{-E} x) 1_{\{h \leq \tau(x) < 1\}} \phi(dx) \\ &= h \int_{\Gamma} (h^{-E} x) (1_{\{\tau(x) < h\}} - 1_{\{\tau(x) < 1\}}) \phi(dx) \\ &= h \int_{\Gamma} (h^{-E} x) (1_{\{\tau(h^{-E} x) < 1\}} - 1_{\{\tau(x) < 1\}}) \phi(dx) \\ &= h \int_{\Gamma} (h^{-E} x) (1_{\{\|h^{-E} x\|_0 < 1\}} - 1_{\{\|x\|_0 < 1\}}) \phi(dx). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(e^{i\langle y, Y(1, h) \rangle}) \\ &= \exp\left(h \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle h^{-E^*} y, x \rangle} - 1 - i \langle h^{-E^*} y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}}\right) \phi(dx)\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-ih \langle y, \int_{\Gamma} (h^{-E} x) (1_{\{\|h^{-E} x\|_0 < 1\}} - 1_{\{\|x\|_0 < 1\}}) \phi(dx) \rangle\right) \\ &= \exp\left(h \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, h^{-E} x \rangle} - 1 - i \langle y, h^{-E} x \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (1_{\{\|x\|_0 < 1\}} + 1_{\{\|h^{-E} x\|_0 < 1\}} - 1_{\{\|x\|_0 < 1\}})\right) \phi(dx)\right) \\ &= \exp\left(h \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, h^{-E} x \rangle} - 1 - i \langle y, h^{-E} x \rangle 1_{\{\|h^{-E} x\|_0 < 1\}}\right) \phi(dx)\right) \\ &= \exp\left(h \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i \langle y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}}\right) (h^{-E} \phi)(dx)\right) \\ &= \exp\left(i \langle y, a_h \rangle + \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i \langle y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}}\right) \phi_h(dx)\right) \end{aligned}$$

mit $a_h = 0$ und $\phi_h = h(h^{-E} \phi)$. Da $Y(t, h)$ mit $t \geq 0$ für jedes $h > 0$ einen Lévy-Prozess bildet, reicht es nach dem Satz von Skorohod (siehe Theorem 15.17 und Aufgabe 3 in Kapitel 16 im Buch [16]) die Konvergenz in $t = 1$ zu zeigen:

$$Y(1, h) \Rightarrow Y(1) \quad \text{für } h \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

Wir zeigen (3.21) mithilfe von Theorem 3.1.16 auf Seite 47 im Buch [18], d. h. wir beweisen folgende Bedingungen:

- (a) $\phi_h \rightarrow \phi_0$ in \mathcal{M} für $h \rightarrow 0$, d. h. ϕ_h konvergiert vage gegen ϕ_0 .
 (b) $a_h \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.
 (c) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, x \rangle^2 \phi_h(dx) = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$.
- (a) Sei $A \subset \Gamma$ eine ϕ_0 -Stetigkeitsmenge mit $\text{dist}(A, 0) > 0$, d. h. $\phi_0(\partial A) = 0$. Es gilt mit (3.1)

$$\begin{aligned}
 \phi_h(A) &= h\phi(h^E A) \\
 &= h \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{h^E A}(r^E u) q(r^\rho, u) r^{-2} dr \sigma(du) \\
 &= h \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(h^{-E} r^E u) q(r^\rho, u) r^{-2} dr \sigma(du) \\
 &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) q((sh)^\rho, u) s^{-2} ds \sigma(du) \\
 &= \int_{S_0} \int_0^\infty f_h(s, u) s^{-2} ds \sigma(du).
 \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert $f_h(s, u) = 1_A(s^E u) q((sh)^\rho, u)$ gegen $1_A(s^E u)$ für σ -fast alle $u \in S_0$, da $q(0^+, u) = 1$ für σ -fast alle $u \in S_0$ im Fall einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung ist. Da $\text{dist}(A, 0) > 0$ ist, existiert ein $r_0 > 0$, so dass

$$f_h(s, u) \leq 1_{[r_0, \infty)}(s) q((sh)^\rho, u) \leq 1_{[r_0, \infty)}(s) \quad \text{für alle } h > 0$$

und für σ -fast alle $u \in S_0$ gilt. Die zweite Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass die Funktion q monoton fallend ist und $q(0^+, u) = 1$ für σ -fast alle $u \in S_0$ im Fall einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung ist. Da σ ein endliches Maß auf der Einheitskugel S_0 ist, folgt

$$\int_{S_0} \int_0^\infty 1_{[r_0, \infty)}(s) s^{-2} ds \sigma(du) = \int_{S_0} \int_{r_0}^\infty s^{-2} ds \sigma(du) = r_0^{-1} \sigma(S_0) < \infty.$$

Damit liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi_h(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) q((sh)^\rho, u) s^{-2} ds \sigma(du) = \phi_0(A).$$

- (b) ist trivial, da $a_h = 0$ ist.
 (c) Für $\epsilon > 0$ gilt mit (3.1) für alle $z \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, x \rangle^2 \phi_h(dx) \\
 &= h \int_{\{0 < \|h^{-E} x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, h^{-E} x \rangle^2 \phi(dx) \\
 &= h \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{0 < \|(\frac{r}{h})^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, \left(\frac{r}{h}\right)^E u \rangle^2 q(r^\rho, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\
 &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 q((sh)^\rho, u) s^{-2} ds \sigma(du) \\
 &= \int_{S_0} \int_0^\infty f_{\epsilon, h}(s, u) s^{-2} ds \sigma(du).
 \end{aligned}$$

Da die Funktion q monoton fallend mit $q(0^+, u) = 1$ für σ -fast alle $u \in S_0$ im Fall einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung ist, folgt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} f_{\epsilon, h}(s, u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 q((sh)^\rho, u) = 0$$

für σ -fast alle $u \in S_0$ und

$$f_{\epsilon, h}(s, u) = 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 q((sh)^\rho, u) \leq 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < 1\}} \langle z, s^E u \rangle^2$$

für σ -fast alle $u \in S_0$, für alle $\epsilon > 0$ und für alle $h > 0$. Da σ ein endliches Maß ist und $a_1 > \frac{1}{2}$, gilt

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < 1\}} \langle z, s^E u \rangle^2 \frac{ds}{s^2} \sigma(du) \\ & \leq C \|z\|^2 \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < 1\}} \|s^E u\|_0^2 \frac{ds}{s^2} \sigma(du) \\ & \leq C \|z\|^2 \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\tau(s^E u) < 1\}} \tau(s^E u)^{2(a_1 - \delta)} \frac{ds}{s^2} \sigma(du) \\ & \leq C \|z\|^2 \int_{S_0} \int_0^1 s^{2(a_1 - \delta) - 2} ds \sigma(du) \\ & = \frac{C \|z\|^2 \sigma(S_0)}{2(a_1 - \delta) - 1} < \infty \end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$, die entsprechend immer geändert wird. Damit liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, x \rangle^2 \phi_h(dx) \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 q((sh)^\rho, u) \frac{ds}{s^2} \sigma(du) \\ & = 0. \end{aligned}$$

(ii) Wegen der Bedingung (3.19) und Lemma 2.3.1 gilt $\int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} \|x\|_0^2 \phi(dx) < \infty$ und damit ist $E\|X(1)\|_0^2$ endlich. $Z(t, h) = h^{-\frac{1}{2}I} X_h(t) - b'_h(t)$ mit $t \geq 0$ bilden für jedes $h > 0$ einen Lévy-Prozess. Dabei besitzt $Z(1, h)$ die charakteristische Funktion der Form

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{i\langle y, Z(1, h) \rangle}) & = \exp \left[-ih^{\frac{1}{2}} \langle y, \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x \phi(dx) \rangle \right. \\ & \quad \left. + h \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, h^{-\frac{1}{2}I} x \rangle} - 1 - i\langle y, h^{-\frac{1}{2}I} x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}} \right) \phi(dx) \right] \\ & = \exp \left[h \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle \right) (h^{-\frac{1}{2}I} \phi)(dx) \right] \\ & = \exp \left[i\langle y, a_h \rangle + \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle \right) \phi^h(dx) \right] \end{aligned}$$

und damit ist der Erwartungswert gleich Null, wobei $\phi^h = h(h^{-\frac{1}{2}I} \phi)$ und $a_h = 0$ ist. Analog zu Teil (i) reicht es Folgendes zu zeigen:

$$Z(1, h) \Rightarrow B(1) \quad \text{für } h \rightarrow \infty. \quad (3.22)$$

Um (3.22) zu zeigen, müssen wir folgende Bedingungen beweisen:

- (a) $\phi^h \rightarrow 0$ in \mathcal{M} für $h \rightarrow \infty$.
- (b) $a_h \rightarrow 0$ für $h \rightarrow \infty$.
- (c) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, x \rangle^2 \phi^h(dx) = \int_{\Gamma} \langle z, x \rangle^2 \phi(dx)$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$.

(a) Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\phi^h(\{\|x\|_0 > \epsilon\}) &= \int_{\{\|x\|_0 > \epsilon\}} \phi^h(dx) \\
&= \int_{\{\|x\|_0 > \epsilon\}} \frac{\|x\|_0^2}{\|x\|_0^2} \phi^h(dx) \\
&\leq \epsilon^{-2} \int 1_{\{\|x\|_0 > \epsilon\}} \|x\|_0^2 \phi^h(dx) \\
&= \epsilon^{-2} h \int 1_{\{\|h^{-\frac{1}{2}} I x\|_0 > \epsilon\}} \|h^{-\frac{1}{2}} I x\|_0^2 \phi(dx) \\
&= \epsilon^{-2} \int 1_{\{\|x\|_0 > \epsilon h^{\frac{1}{2}}\}} \|x\|_0^2 \phi(dx) \\
&= \epsilon^{-2} \int_{\Gamma} f_h(x, \epsilon) \phi(dx).
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit folgt aus $h^{-\frac{1}{2}} I x = h^{-\frac{1}{2}} I x = h^{-\frac{1}{2}} x$.

$f_h(x, \epsilon) = 1_{\{\|x\|_0 > \epsilon h^{\frac{1}{2}}\}} \|x\|_0^2$ konvergiert für $h \rightarrow \infty$ gegen 0 und es gilt $f_h(x, \epsilon) \leq \|x\|_0^2$ für alle $h > 0$. Die Voraussetzung (3.19) und die Eigenschaften des Lévy-Maßes liefern

$$\int_{\Gamma} \|x\|_0^2 \phi(dx) < \infty.$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz impliziert

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \epsilon^{-2} \int_{\Gamma} f_h(x, \epsilon) \phi(dx) = \lim_{h \rightarrow \infty} \epsilon^{-2} \int_{\{\|x\|_0 > \epsilon h^{\frac{1}{2}}\}} \|x\|_0^2 \phi(dx) = 0$$

und damit folgt

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \phi^h(\{\|x\|_0 > \epsilon\}) = 0.$$

Sei $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $\text{dist}(A, 0) > 0$ beliebig. Da $\text{dist}(A, 0) > 0$ ist, existiert $\epsilon > 0$, so dass $A \subset \{\|x\|_0 > \epsilon\}$. Damit gilt $\phi^h \rightarrow 0$ in \mathcal{M} für $h \rightarrow \infty$.

- (b) gilt offensichtlich.
- (c) Es gilt für alle $z \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
\int_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, x \rangle^2 \phi^h(dx) &= h \int_{\{0 < \|h^{-\frac{1}{2}} I x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, h^{-\frac{1}{2}} I x \rangle^2 \phi(dx) \\
&= \int_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon h^{\frac{1}{2}}\}} \langle z, x \rangle^2 \phi(dx) \\
&= \int_{\Gamma} f_{\epsilon, h}(x) \phi(dx)
\end{aligned}$$

mit $f_{\epsilon,h}(x) := 1_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon h^{\frac{1}{2}}\}} \langle z, x \rangle^2$. Desweiteren gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow \infty} f_{\epsilon,h}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow \infty} 1_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon h^{\frac{1}{2}}\}} \langle z, x \rangle^2 = \langle z, x \rangle^2$$

und

$$f_{\epsilon,h}(x) \leq \langle z, x \rangle^2 \quad \text{für alle } \epsilon > 0 \quad \text{und alle } h > 0$$

sowie

$$\int_{\Gamma} \langle z, x \rangle^2 \phi(dx) \leq C \|z\|^2 \int_{\Gamma} \|x\|_0^2 \phi(dx).$$

Die Behauptung folgt aus der Eigenschaften des Lévy-Maßes, (3.19) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz. □

Lemma 3.1.24.

(i) Falls $X(1)$ in Satz 3.1.23 das Rosiński-Maß R und die charakteristische Funktion der Form

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, X(1) \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle y, x \rangle} - 1) \phi(dx) \right)$$

besitzt, so können wir $b_h(t) = 0$ für alle $t > 0$ in (3.18) und $b'_h(t) = th^{\frac{1}{2}} \int_{\Gamma} x \phi(dx)$ für alle $t > 0$ in (3.20) wählen.

(ii) Falls $X(1)$ in Satz 3.1.23 das Rosiński-Maß R und die charakteristische Funktion der Form

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, X(1) \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle) \phi(dx) \right)$$

besitzt, so können wir $b_h(t) = 0$ für alle $t > 0$ in (3.18) und $b'_h(t) = 0$ für alle $t > 0$ in (3.20) wählen.

Beweis

(i) $X(1)$ besitzt die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, X(1) \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle y, x \rangle} - 1) \phi(dx) \right).$$

Somit hat $h^{-E}X(h)$ die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, h^{-E}X(h) \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle y, x \rangle} - 1) \phi_h(dx) \right)$$

mit $\phi_h = h(h^{-E}\phi)$. Analog zu (i) aus Satz 3.1.23 gelten die Bedingungen (a)-(c) auch hier. Die charakteristische Funktion von $h^{-\frac{1}{2}}X(h) - b'_h(1)$ hat die Darstellung

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, h^{-\frac{1}{2}}X(h) - b'_h(1) \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle) \phi^h(dx) \right)$$

mit $\phi^h = h(h^{-\frac{1}{2}}\phi)$. Analog zu (ii) aus Satz 3.1.23 gelten die Bedingungen (a)-(c) auch hier und damit folgt die Behauptung.

(ii) $X(1)$ besitzt die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, X(1) \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle) \phi(dx) \right).$$

Für $B = E$ oder $B = \frac{1}{2}I$ besitzt $h^{-B}X(h)$ die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, h^{-B}X(h) \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle) \phi'(dx) \right)$$

mit $\phi' = h(h^{-B}\phi)$. Die Bedingungen (a)-(c) folgen analog zu (a)-(c) in (i) und (ii) aus Satz 3.1.23. Damit gilt die Behauptung. \square

Satz 3.1.23 und Lemma 3.1.24 besagen, dass der $pTOS_E^\rho$ Lévy-Prozess auf kurze Zeit unter geeigneter Raum- und Zeitskalierung einen (t^E) operator stabilen Lévy-Prozess approximiert, während sich der TOS_E^ρ Lévy-Prozess und damit auch der $pTOS_E^\rho$ Lévy-Prozess unter der Voraussetzung (3.19) auf lange Zeit hin wie eine Brownsche Bewegung verhält.

Satz 3.1.25. *Sei ϕ das Lévy-Maß einer $pTOS_E^\rho$ Verteilung. Dann ist ϕ ein regulär variierendes Maß in der Null mit Exponent E .*

Beweis

ϕ_0 ist \mathcal{M} -voll. Aus dem Beweis von Satz 3.1.23 Teil (i) folgt $h(h^{-E}\phi) \rightarrow \phi_0$ in \mathcal{M} für $h \rightarrow 0$. Das ist äquivalent zu $\frac{1}{n}(n^E\phi) \rightarrow \phi_0$ in \mathcal{M} für $n \rightarrow \infty$. Außerdem ist die Folge $(n^E)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Beispiel 2.1.8 regulär variierend mit Index E . E ist invertierbar, da die Realteile seiner Eigenwerte strikt größer als Null sind. Proposition 2.1.13 Teil (i) liefert dann die Behauptung. \square

3.2 Tempered operator stabile Verteilungen

Dieser Abschnitt dient der Vollständigkeit der Arbeit. Wir werden hier den Spezialfall von TOS_E^ρ Verteilungen für $\rho = 1$ betrachten. Eine $(p)TOS_E^\rho$ Verteilung mit $\rho = 1$ wird im Folgenden kurz **(proper) tempered operator stabile Verteilung mit Exponent E** genannt und wir schreiben $(p)TOS_E$ anstatt $(p)TOS_E^1$. Der Grund für die Einführung dieses Spezialfalles besteht darin, dass wir im nächsten Kapitel eine Irrfahrt konstruieren, die gegen eine $pTOS_E$ Verteilung konvergiert und eine Reihendarstellung für den $pTOS_E$ Lévy-Prozess herleiten. Auf Beweise wird an dieser Stelle verzichtet, da diese analog zu den Beweisen des vorherigen Abschnittes gehen. Zur Erinnerung: TOS_E bzw. $pTOS_E$ Verteilungen sind wie folgt definiert:

Definition 3.2.1. *Ein volles Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf \mathbb{R}^d heißt **tempered operator stabil mit Exponent E** , falls μ unendlich teilbar mit $\mu \sim [a, 0, \phi]$ ist. Dabei besitzt das Lévy-Maß ϕ folgende Darstellung für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$*

$$\phi(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) q(r, u) r^{-2} dr \sigma(du), \quad (3.23)$$

wobei σ ein endliches Maß auf der Einheitssphäre S_0 ist. $E \in L(\mathbb{R}^d)$ ist ein linearer Operator mit der Eigenschaft, dass seine Eigenwerte Realteile a_1, \dots, a_p mit $p \leq d$ und $\frac{1}{2} < a_1 < \dots < a_p$ besitzen. Die messbare Funktion $q : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow (0, \infty)$ mit $r \mapsto q(r, u)$ ist vollständig monoton und es gilt $q(\infty, u) = 0$ für alle $u \in S_0$. Gilt zusätzlich $q(0^+, u) = 1$ für σ -fast alle $u \in S_0$, dann nennen wir μ **proper tempered operator stabile Verteilung mit Exponent E** .

Wegen der vollständigen Monotonie besitzt die Tempering-Funktion folgende Darstellung

$$q(r, u) = \int_0^\infty e^{-rs} Q(ds|u),$$

wobei $\{Q(\cdot|u)\}_{u \in S_0}$ eine messbare Familie von Borelmaßen auf $(0, \infty)$ ist, d. h. $Q(B|u)$ ist messbar in u für jede Menge $B \in \mathcal{B}((0, \infty))$. $Q(\cdot|u)$ sind Wahrscheinlichkeitsmaße für σ -fast alle $u \in S_0$, wenn $q(0^+, u) = 1$. Die Maße Q bzw. R sind dann definiert durch

Definition 3.2.2. Für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ definieren wir das Maß Q durch

$$Q(A) := \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) Q(dr|u) \sigma(du) \quad (3.24)$$

und das Maß R durch

$$R(A) := \int_\Gamma 1_A(\tau(x)^{-E} l(x)) \tau(x) Q(dx). \quad (3.25)$$

Dabei sind $Q(\cdot|u)$ und σ wie oben definiert.

Damit hat R folgende Polardarstellung für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$

$$R(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^{-E} u) r Q(dr|u) \sigma(du). \quad (3.26)$$

Nach Lemma 3.1.10 mit $\rho = 1$ können wir das Maß Q durch das Maß R mit der gleichen Transformation erhalten:

Lemma 3.2.3. Für das Maß Q in (3.24) und das Maß R in (3.25) gilt für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$

$$Q(A) = \int_\Gamma 1_A(\tau(x)^{-E} l(x)) \tau(x) R(dx) \quad (3.27)$$

Wir können das Lévy-Maß ϕ einer TOS_E Verteilung durch das Maß R wie folgt charakterisieren.

Satz 3.2.4. Das Lévy-Maß ϕ einer TOS_E Verteilung besitzt folgende Darstellung

$$\phi(A) = \int_\Gamma \int_0^\infty 1_A(t^E x) t^{-2} e^{-t} dt R(dx) \quad (3.28)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$, wobei R ein eindeutiges Maß auf Γ mit

$$\int_\Gamma \left(\tau(x)^{2(a_p + \delta')} \wedge \tau(x) \right) R(dx) < \infty \quad \text{für alle } \delta' > 0 \text{ ist.} \quad (3.29)$$

Umgekehrt ist R ein Maß mit

$$\int_{\Gamma} \left(\tau(x)^{2(a_1-\delta)} \wedge \tau(x) \right) R(dx) < \infty \quad \text{für ein geeignet kleines } \delta > 0, \quad (3.30)$$

so stellt (3.28) das Lévy-Maß einer TOS_E Verteilung dar. ϕ ist das Lévy-Maß einer $pTOS_E$ Verteilung genau dann, wenn

$$\int_{\Gamma} \tau(x) R(dx) < \infty. \quad (3.31)$$

Außerdem können die Momente beliebiger Ordnung von TOS_E Verteilungen endlich sein.

Korollar 3.2.5. *Sei μ eine TOS_E Verteilung mit Lévy-Maß ϕ , das die Darstellung (3.28) besitzt. Dann gilt für $\delta' > 0$*

$$(i) \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^\beta \mu(dx) < \infty \text{ für } 0 < \beta < \frac{1}{a_p}.$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^{\frac{1}{a_p+\delta'}} \mu(dx) < \infty, \text{ wenn } \int_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x) \ln(\tau(x)) R(dx) < \infty \text{ gilt.}$$

$$(iii) \text{ Außerdem folgt } \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^\beta \mu(dx) < \infty, \text{ wenn } \int_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x)^{\beta(a_p+\delta')} R(dx) < \infty \text{ für } \beta > \frac{1}{a_p+\delta'} \text{ gilt.}$$

Desweiteren gilt für $pTOS_E$ Verteilungen:

Lemma 3.2.6. *Sei ϕ das Lévy-Maß einer $pTOS_E$ Verteilung. Falls $a_1 > 1$ ist, dann gilt*

$$\int_{\{0 < \|x\|_0 \leq 1\}} \|x\|_0 \phi(dx) < \infty.$$

Folgendes Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen den Parametern von $pTOS_E$ Verteilungen und den Parametern von (t^E) operator stabilen Verteilungen her.

Lemma 3.2.7. *Sei ϕ das Lévy-Maß einer $pTOS_E$ Verteilung mit der Darstellung (3.23) und das Rosiński-Maß R . Sei ϕ_0 das Lévy-Maß einer (t^E) operator stabilen Verteilung mit Darstellung (2.10). Dann gilt für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$*

$$\phi_0(A) = \int_{\Gamma} \int_0^\infty 1_A(t^E x) t^{-2} dt R(dx). \quad (3.32)$$

Außerdem gilt für alle $B \in \mathcal{B}(S_0)$

$$\sigma(B) = \int_{\Gamma} 1_B(\tau(x)^{-E} x) \tau(x) R(dx). \quad (3.33)$$

Die TOS_E Verteilungen erfüllen auch folgende Eigenschaft des Kurz- und Langzeitverhaltens:

Satz 3.2.8. Sei $\mathbb{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein TOS_E Lévy-Prozess in \mathbb{R}^d . $X(1)$ besitzt das Rosiński-Maß R und die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, X(1) \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}} \right) \phi(dx) \right)$$

(i) Falls $\int_{\Gamma} \tau(x)R(dx) < \infty$ ist, dann gilt

$$h^{-E}\mathbb{X}_h - b_h \Rightarrow \mathbb{Y} \quad \text{in } D([0, \infty), \mathbb{R}^d) \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (3.34)$$

mit

$$b_h(t) = -th \int_{\Gamma} (h^{-E}x) 1_{\{h \leq \tau(x) < 1\}} \phi(dx),$$

wobei $\mathbb{Y} = \{Y(t) : t \geq 0\}$ ein (t^E) operator stabiler Lévy-Prozess ist. Dabei besitzt die Verteilung von $Y(1)$ die charakteristische Funktion

$$\exp \left(\int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}} \right) \phi_0(dx) \right).$$

Das Lévy-Maß ϕ_0 ist von der Form (2.10). ϕ_0 bzw. σ können die Darstellung (3.32) bzw. (3.33) besitzen.

(ii) Gilt für ein $\delta' > 0$

$$\int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} R(dx) < \infty, \quad (3.35)$$

dann folgt für $h \rightarrow \infty$

$$h^{-\frac{1}{2}}I\mathbb{X}_h - b'_h \Rightarrow \mathbb{B} \quad \text{in } D([0, \infty), \mathbb{R}^d). \quad (3.36)$$

Dabei ist

$$b'_h(t) = th^{\frac{1}{2}} \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x \phi(dx)$$

und $\mathbb{B} = \{B(t) : t \geq 0\}$ eine zentrierte Brownsche Bewegung mit charakteristischer Funktion

$$\exp \left(-\frac{t}{2} \int_{\Gamma} \langle y, x \rangle^2 \phi(dx) \right).$$

Bevor wir diesen Abschnitt abschließen, stellen wir zwei Beispiele von TOS_E Verteilungen vor.

Beispiel 3.2.9.

(i) Sei die Funktion $q : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow (0, \infty)$ definiert durch $q(r, u) = q(r) = e^{-\kappa r}$ für eine Konstante $\kappa > 0$ und für alle $u \in S_0$. q ist vollständig monoton, da q unendlich oft stetig differenzierbar und $(-1)^n q^{(n)}(r) = \kappa^n e^{-\kappa r} = \kappa^n q(r) \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r) = 0$ und $q(0^+) = 1$. Wir können die Funktion q wie folgt umschreiben:

$$q(r) = \int_0^{\infty} e^{-rs} \epsilon_{\kappa}(ds).$$

Wir setzen $Q(ds|u) = \epsilon_\kappa(ds)$. $Q(\cdot|u)$ ist für alle $u \in S_0$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Wir definieren für $A \subset \Gamma$ das Maß Q durch

$$Q(A) := \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) \epsilon_\kappa(dr) \sigma(du) = \int_{S_0} 1_A(\kappa^E u) \sigma(du)$$

und das Maß R durch

$$R(A) := \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^{-E} u) r \epsilon_\kappa(dr) \sigma(du) = \kappa \int_{S_0} 1_A(\kappa^{-E} u) \sigma(du)$$

für ein endliches Maß σ auf der Einheitssphäre S_0 und einen linearen Operator E in \mathbb{R}^d , dessen Eigenwerte Realteile a_1, \dots, a_p mit $\frac{1}{2} < a_1 < \dots < a_p$ und $p \leq d$ besitzen. Für $\kappa = 1$ sind die Maße Q und R auf S_0 konzentriert und stimmen mit dem Maß σ überein. Es gilt weiter

$$\int_\Gamma \tau(x) R(dx) = \kappa \int_{S_0} \tau(\kappa^{-E} u) \sigma(du) = \kappa \kappa^{-1} \int_{S_0} \sigma(du) = \sigma(S_0).$$

Daraus folgt mit Satz 3.2.4, dass das Maß

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \int_\Gamma \int_0^\infty 1_A(t^E x) t^{-2} e^{-t} dt R(dx) \\ &= \kappa \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(t^E \kappa^{-E} u) t^{-2} e^{-t} dt \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) s^{-2} e^{-\kappa s} ds \sigma(du) \end{aligned}$$

für $A \subset \Gamma$ das Lévy-Maß einer p TOS $_E$ Verteilung μ auf \mathbb{R}^d ist. Dieses Maß μ besitzt Momente beliebiger Ordnung, denn für $\delta' > 0$ gilt nach Korollar 3.2.5 $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^\beta \mu(dx) < \infty$ für $0 < \beta < \frac{1}{a_p}$. Da

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma 1_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \ln(\tau(x)) R(dx) \\ &= \kappa \int_{S_0} 1_{\{\tau(\kappa^{-E} u) > 1\}} \tau(\kappa^{-E} u) \ln(\tau(\kappa^{-E} u)) \sigma(du) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } \kappa \geq 1 \\ \ln(\kappa^{-1}) \sigma(S_0) & \text{für } 0 < \kappa < 1 \end{cases} \\ &< \infty \end{aligned}$$

gilt, folgt ebenfalls mit Korollar 3.2.5, dass $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^{\frac{1}{a_p + \delta'}} \mu(dx) < \infty$ ist. Die andere Momente existieren auch wegen Korollar 3.2.5 und

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma 1_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^{\beta(a_p + \delta')} R(dx) \\ &= \kappa \int_{S_0} 1_{\{\tau(\kappa^{-E} u) > 1\}} \tau(\kappa^{-E} u)^{\beta(a_p + \delta')} \sigma(du) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } \kappa \geq 1 \\ \kappa^{1 - \beta(a_p + \delta')} \sigma(S_0) & \text{für } 0 < \kappa < 1 \end{cases} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Da μ eine $pTOS_E$ Verteilung ist, verhält sich der $pTOS_E$ Lévy-Prozess \mathbb{X} mit $X(1)$ nach μ -verteilt, auf kurze Zeit betrachtet, wie ein (t^E) operator stabiler Lévy-Prozess. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} 1_{\{\tau(x)>1\}} \tau(x)^{2(a_p+\delta')} R(dx) \\ &= \kappa \int_{S_0} 1_{\{\tau(\kappa^{-E}u)>1\}} \tau(\kappa^{-E}u)^{2(a_p+\delta')} \sigma(du) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } \kappa \geq 1 \\ \kappa^{1-2(a_p+\delta')} \sigma(S_0) & \text{für } 0 < \kappa < 1 \end{cases} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Damit gilt der zweite Teil von Satz 3.2.8, d. h. der Prozess \mathbb{X} approximiert auf lange Zeit hin eine Brownsche Bewegung \mathbb{B} mit $B(1) \sim \nu$ und charakteristischer Funktion

$$\hat{\nu}(y) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{S_0} \int_0^\infty \langle y, r^E u \rangle^2 e^{-\kappa r} r^{-2} dr \sigma(du)\right).$$

- (ii) Wir verallgemeinern das erste Beispiel, indem wir anstatt der Konstante κ eine von u abhängige Funktion $\kappa(u)$ annehmen. Also sei die Funktion $q : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow (0, \infty)$ definiert durch $q(r, u) = e^{-\kappa(u)r}$, für eine messbare Funktion $\kappa : S_0 \rightarrow (0, \infty)$. Die Abbildung $r \mapsto q(r, u)$ ist unendlich oft stetig differenzierbar und besitzt partielle Ableitungen mit alternierendem Vorzeichen, d. h. $(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial r^n} q(r, u) = \kappa(u)^n e^{-\kappa(u)r} = \kappa(u)^n q(r, u) \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $u \in S_0$. Desweiteren gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r, u) = 0$ und $q(0^+, u) = 1$ für alle $u \in S_0$. Die Funktion q hat folgende Gestalt:

$$q(r, u) = \int_0^\infty e^{-rs} \epsilon_{\kappa(u)}(ds).$$

Wir setzen $Q(ds|u) = \epsilon_{\kappa(u)}(ds)$. $Q(\cdot|u)$ ist für alle $u \in S_0$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Wir definieren für $A \subset \Gamma$ das Maß Q durch

$$Q(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) \epsilon_{\kappa(u)}(dr) \sigma(du) = \int_{S_0} 1_A(\kappa(u)^E u) \sigma(du)$$

und das Maß R durch

$$R(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^{-E} u) r \epsilon_{\kappa(u)}(dr) \sigma(du) = \int_{S_0} 1_A(\kappa(u)^{-E} u) \kappa(u) \sigma(du).$$

Dabei ist σ ein endliches Maß auf der Einheitssphäre S_0 und $E \in L(\mathbb{R}^d)$, dessen Eigenwerte Realteile a_1, \dots, a_p mit $\frac{1}{2} < a_1 < \dots < a_p$ und $p \leq d$ besitzen. Da

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \tau(x) R(dx) &= \int_{S_0} \tau(\kappa(u)^{-E} u) \kappa(u) \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \kappa(u)^{-1} \kappa(u) \sigma(du) \\ &= \sigma(S_0) \end{aligned}$$

gilt, folgt aus Satz 3.2.4, dass das Maß

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \int_{\Gamma} \int_0^{\infty} 1_A(t^E x) t^{-2} e^{-t} dt R(dx) \\ &= \int_{S_0} \int_0^{\infty} 1_A(t^E \kappa(u)^{-E} u) t^{-2} e^{-t} dt \kappa(u) \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^{\infty} 1_A(s^E u) s^{-2} e^{-\kappa(u)s} ds \sigma(du)\end{aligned}$$

für $A \subset \Gamma$ das Lévy-Maß einer $pTOS_E$ Verteilung μ auf \mathbb{R}^d ist. Außerdem gilt für $\delta' > 0$

- (a) $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^{\beta} \mu(dx) < \infty$ für $0 < \beta < \frac{1}{a_p}$.
- (b) Gilt $\int_{\{\kappa(u) < 1\}} \ln(\kappa(u)^{-1}) \sigma(du) < \infty$, so ist $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^{\frac{1}{a_p + \delta'}} \mu(dx) < \infty$.
- (c) $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_0^{\beta} \mu(dx) < \infty$, wenn $\int_{\{\kappa(u) < 1\}} \kappa(u)^{1 - \beta(a_p + \delta')} \sigma(du) < \infty$ für $\beta > \frac{1}{a_p + \delta'}$ ist.

Dies folgt aus Korollar 3.2.5 und

$$\begin{aligned}& \int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x) \ln(\tau(x)) R(dx) \\ &= \int_{\{\tau(\kappa(u)^{-E} u) > 1\}} \tau(\kappa(u)^{-E} u) \ln(\tau(\kappa(u)^{-E} u)) \kappa(u) \sigma(du) \\ &= \int_{\{\kappa(u)^{-1} > 1\}} \kappa(u)^{-1} \ln(\kappa(u)^{-1}) \kappa(u) \sigma(du) \\ &= \int_{\{\kappa(u) < 1\}} \ln(\kappa(u)^{-1}) \sigma(du)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^{\beta(a_p + \delta')} R(dx) &= \int_{\{\tau(\kappa(u)^{-E} u) > 1\}} \tau(\kappa(u)^{-E} u)^{\beta(a_p + \delta')} \kappa(u) \sigma(du) \\ &= \int_{\{\kappa(u)^{-1} > 1\}} \kappa(u)^{-\beta(a_p + \delta')} \kappa(u) \sigma(du) \\ &= \int_{\{\kappa(u) < 1\}} \kappa(u)^{1 - \beta(a_p + \delta')} \sigma(du).\end{aligned}$$

Da $\int_{\Gamma} \tau(x) R(dx) = \sigma(S_0)$ ist, gilt der erste Teil von Satz 3.2.8. Der zweite Teil gilt nur, wenn

$$\int_{\{\tau(x) > 1\}} \tau(x)^{2(a_p + \delta')} R(dx) = \int_{\{\kappa(u) < 1\}} \kappa(u)^{1 - 2(a_p + \delta')} \sigma(du) < \infty$$

ist. Dabei ist die charakteristische Funktion der Brownschen Bewegung von der Form

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \int_{S_0} \int_0^{\infty} \langle y, s^E u \rangle^2 s^{-2} e^{-\kappa(u)s} ds \sigma(du)\right).$$

3.3 Verallgemeinerte tempered operator stabile Verteilungen

Wir betrachten hier eine weitere Klasse von tempered operator stabilen Verteilungen: die sogenannten verallgemeinerten tempered operator stabilen Verteilungen. Diese Klasse enthält alle $pTOS_E^\rho$ Verteilungen. In diesem Fall können wir das Verhalten eines verallgemeinerten tempered operator stabilen Prozesses auf kurze und lange Zeit auch beweisen. Die anderen Eigenschaften können wir aber nicht zeigen, da die Funktion q keine explizite Darstellung besitzt.

Definition 3.3.1. *Wir nennen eine volle unendlich teilbare Verteilung μ auf \mathbb{R}^d verallgemeinerte tempered operator stabile Verteilung mit Exponent E (engl.: generalised tempered operator stable distribution), falls μ keinen Gaußanteil besitzt und für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$*

$$\phi(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) q(r, u) r^{-2} dr \sigma(du) \quad (3.37)$$

gilt, wobei σ ein endliches Maß auf der Einheitskugel S_0 ist. $E \in L(\mathbb{R}^d)$ ist ein linearer Operator mit der Eigenschaft, dass seine Eigenwerte Realteile a_1, \dots, a_p mit $\frac{1}{2} < a_1 < \dots < a_p$ und $p \leq d$ besitzen. Die Funktion $q : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow (0, \infty)$ ist eine messbare gleichmäßig beschränkte Funktion, so dass für eine nichtnegative Funktion $g \in L^1(S_0, \sigma)$ folgendes gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|q(r, \cdot) - g(\cdot)\|_{L^1(S_0, \sigma)} = 0. \quad (3.38)$$

Wir bezeichnen diese Klasse von Verteilungen mit $GTOS_E$ und nennen die Funktion q die **Tempering-Funktion**.

Beispiel 3.3.2.

- (i) $pTOS_E^\rho$ Verteilungen sind $GTOS_E$ Verteilungen mit $g(u) = 1$ für alle $u \in S_0$, denn im Fall $pTOS_E^\rho$ Verteilungen ist $q(\cdot, u)$ monoton fallend, konvex und es gilt $q(0^+, u) = 1$, d. h. q ist durch 1 für alle $r > 0$ und für alle $u \in S_0$ beschränkt.
- (ii) GTS Verteilungen im Artikel [23] mit Index $\alpha \in (0, 2)$ und Tempering-Funktion $q(r, u) : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow (0, \infty)$, die gleichmäßig beschränkt ist und in $L^1(S_0, \sigma)$ gegen eine nichtnegative Funktion $g \in L^1(S_0, \sigma)$ für $r \rightarrow 0$ konvergiert, stellen einen Spezialfall der $GTOS_E$ Verteilungen mit Exponent $E = \frac{1}{\alpha}I$ und Tempering-Funktion $\alpha^{-1}q(r^{\frac{1}{\alpha}}, u)$ dar, die ebenfalls gleichmäßig beschränkt ist und in $L^1(S_0, \sigma)$ gegen $\alpha^{-1}g \in L^1(S_0, \sigma)$ für $r \rightarrow 0$ konvergiert.

Da die charakteristische Funktion einer $GTOS_E$ Verteilung μ die Darstellung

$$\hat{\mu}(y) = \exp \left(i \langle y, a \rangle + \int_{\Gamma} \left(e^{i \langle y, x \rangle} - 1 - i \langle y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}} \right) \phi(dx) \right) \quad (3.39)$$

für ein $a \in \mathbb{R}^d$ und das Lévy-Maß ϕ mit der Form (3.37) besitzt, definieren wir die zugehörige (t^E) operator stabile Verteilung μ_0 wie folgt:

Definition 3.3.3. Die volle Verteilung μ_0 mit charakteristischer Funktion

$$\hat{\mu}_0(y) = \exp \left(i\langle y, a \rangle + \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}} \right) \phi_0(dx) \right) \quad (3.40)$$

heißt **die zugehörige** (t^E) **operator stabile Verteilung** von μ mit charakteristischer Funktion (3.39). Dabei besitzt das Lévy-Maß ϕ_0 für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ die Darstellung

$$\phi_0(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) r^{-2} dr g(u) \sigma(du). \quad (3.41)$$

Wir nennen ϕ_0 **das zugehörige** (t^E) **operator stabile Lévy-Maß** und wir sagen, dass μ_0 **das Spektralmaß** $g(u)\sigma(du)$ und **die Drift** von μ besitzt.

Bemerkung 3.3.4. Es gilt für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} (t^E \phi_0)(A) &= \phi_0(t^{-E} A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A((tr)^E u) \frac{dr}{r^2} g(u) \sigma(du) \\ &= t \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) \frac{ds}{s^2} g(u) \sigma(du) \\ &= t \phi_0(A). \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1.6 im Buch [18] gilt $\mu_0^t = t^E \mu_0 * \epsilon_{a_t}$ für geeignete Shifts $a_t \in \mathbb{R}^d$ für alle $t > 0$. Da μ_0 unendlich teilbar und voll ist, ist μ_0 nach Satz 2.2.2 eine (t^E) operator stabile Verteilung ohne Gaußanteil.

Ein Lévy-Prozess $\mathbb{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ heißt **verallgemeinerter tempered stabiler Lévy-Prozess mit Exponent E** , in Bezeichnung **$GTOS_E$ Lévy-Prozess**, falls $X(1)$ eine $GTOS_E$ Verteilung μ hat. Außerdem nennen wir einen Lévy-Prozess $\mathbb{Y} = \{Y(t) : t \geq 0\}$ **den zugehörigen** (t^E) **operator stabilen Lévy-Prozess von \mathbb{X}** , falls $Y(1)$ nach der zugehörigen (t^E) operator stabilen Verteilung verteilt ist.

Satz 3.3.5. Sei $\mathbb{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein $GTOS_E$ Lévy-Prozess. Die charakteristische Funktion der Verteilung μ von $X(1)$ ist durch (3.39) mit $a = 0$ gegeben.

(i) Es gilt

$$h^{-E} \mathbb{X}_h - b_h \Rightarrow \mathbb{Y} \quad \text{in } D([0, \infty), \mathbb{R}^d) \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (3.42)$$

mit

$$b_h(t) = -th \int_{\Gamma} (h^{-E} x) 1_{\{h \leq \tau(x) < 1\}} \phi(dx),$$

wobei $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ der zugehörige (t^E) operator stabile Lévy-Prozess ist. $Y(1)$ besitzt die charakteristische Funktion (3.40) mit $a = 0$ und dem zugehörigen (t^E) operator stabilen Lévy-Maß (3.41).

(ii) Gilt zusätzlich

$$\int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} \|x\|_0^2 \phi(dx) < \infty, \quad (3.43)$$

dann folgt für $h \rightarrow \infty$

$$h^{-\frac{1}{2}I} \mathbb{X}_h - b'_h \Rightarrow \mathbb{B} \quad \text{in } D([0, \infty), \mathbb{R}^d) \quad (3.44)$$

mit

$$b'_h(t) = th^{\frac{1}{2}} \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x \phi(dx).$$

Dabei ist $\mathbb{B} = \{B(t) : t \geq 0\}$ eine zentrierte Brownsche Bewegung mit $B(1) \sim \nu$ und charakteristischer Funktion

$$\hat{\nu}(y) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \langle y, x \rangle^2 \phi(dx)\right).$$

Beweis

(i) Analog zum Beweis von Satz 3.1.23 reicht es, die Konvergenz in $t = 1$ zu zeigen. $Y(1, h) = h^{-E} X_h(1) - b_h(1) = h^{-E} X(h) - b_h(1)$ mit Verteilung $\nu_{1, h}$ besitzt die charakteristische Funktion

$$\hat{\nu}_{1, h}(y) = \exp\left(i \langle y, a_h \rangle + \int_{\Gamma} \left(e^{i \langle y, x \rangle} - 1 - i \langle y, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}}\right) \phi_h(dx)\right)$$

mit $a_h = 0$ und $\phi_h = h(h^{-E} \phi)$. Um die Behauptung zu zeigen, beweisen wir folgende drei Bedingungen:

- (a) $\phi_h \rightarrow \phi_0$ in \mathcal{M} für $h \rightarrow 0$.
- (b) $a_h \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.
- (c) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, x \rangle^2 \phi_h(dx) = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$.

Die Behauptung folgt dann mit Theorem 3.1.16 in [18].

(a) Sei $A \subset \Gamma$ mit $\phi_0(\partial A) = 0$ und $\text{dist}(A, 0) > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi_h(A) &= h \phi(h^E A) \\ &= h \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(h^{-E} r^E u) q(r, u) r^{-2} dr \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) q(sh, u) s^{-2} ds \sigma(du) \\ &= \int_0^\infty \int_{S_0} 1_A(s^E u) q(sh, u) \sigma(du) s^{-2} ds \\ &= \int_0^\infty f_h(s) s^{-2} ds. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$f_h(s) = \int_{S_0} 1_A(s^E u) q(sh, u) \sigma(du).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left| f_h(s) - \int_{S_0} 1_A(s^E u) g(u) \sigma(du) \right| &\leq \int_{S_0} 1_A(s^E u) |q(sh, u) - g(u)| \sigma(du) \\ &\leq \int_{S_0} |q(sh, u) - g(u)| \sigma(du). \end{aligned}$$

Damit liefert die Eigenschaft (3.38)

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h(s) = \int_{S_0} 1_A(s^E u) g(u) \sigma(du).$$

Da $\text{dist}(A, 0) > 0$ ist, existiert ein $r_0 > 0$, so dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} f_h(s) &= \int_{S_0} 1_A(s^E u) q(sh, u) \sigma(du) \\ &\leq \int_{S_0} q(sh, u) \sigma(du) 1_{[r_0, \infty)}(s) \\ &\leq M \sigma(S_0) 1_{[r_0, \infty)}(s). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass die Tempering-Funktion q gleichmäßig beschränkt ist, d. h. es existiert ein $M > 0$, so dass $q(r, u) \leq M$ für alle $r > 0$ und $u \in S_0$ ist. Da σ ein endliches Maß auf der Einheitskugel S_0 ist, folgt

$$M \sigma(S_0) \int_0^\infty 1_{[r_0, \infty)}(s) s^{-2} ds = M \sigma(S_0) r_0^{-1} < \infty.$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz impliziert

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \phi_h(A) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_{S_0} 1_A(s^E u) q(sh, u) \sigma(du) s^{-2} ds \\ &= \int_0^\infty \int_{S_0} 1_A(s^E u) g(u) \sigma(du) s^{-2} ds \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(s^E u) s^{-2} ds g(u) \sigma(du) \\ &= \phi_0(A). \end{aligned}$$

(b) ist klar, da $a_h = 0$.

(c) Für $\epsilon > 0$ gilt für alle $z \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} &\int_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, x \rangle^2 \phi_h(dx) \\ &= h \int_{\{0 < \|h^{-E} x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, h^{-E} x \rangle^2 \phi(dx) \\ &= h \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{0 < \|h^{-E} r^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, h^{-E} r^E u \rangle^2 q(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 q(sh, u) s^{-2} ds \sigma(du) \\ &= \int_0^\infty \int_{S_0} 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 q(sh, u) \sigma(du) s^{-2} ds \\ &= \int_0^\infty f_{\epsilon, h}(s) s^{-2} ds. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$f_{\epsilon, h}(s) = \int_{S_0} 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 q(sh, u) \sigma(du).$$

Wir zeigen zunächst, dass folgende Konvergenz gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} f_{\epsilon, h}(s) = 0.$$

Wegen $|\langle z, s^E u \rangle| \leq \|z\| \|s^E u\| \leq C \|z\| \|s^E\|$ für alle $u \in S_0$ folgt

$$\begin{aligned} & |f_{\epsilon, h}(s) - \int_{S_0} 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 g(u) \sigma(du)| \\ & \leq \int_{S_0} 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 |q(sh, u) - g(u)| \sigma(du) \\ & \leq \int_{S_0} \langle z, s^E u \rangle^2 |q(sh, u) - g(u)| \sigma(du) \\ & \leq (C \|z\| \|s^E\|)^2 \int_{S_0} |q(sh, u) - g(u)| \sigma(du). \end{aligned}$$

Die Bedingung (3.38) liefert dann

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f_{\epsilon, h}(s) &= \int_{S_0} 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 g(u) \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} f_{\epsilon}(s, u) g(u) \sigma(du). \end{aligned}$$

Die Funktion $f_{\epsilon}(s, u) = 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2$ konvergiert für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen 0 und ist durch die Funktion $\langle z, s^E u \rangle^2$ für alle $\epsilon > 0$ beschränkt. Außerdem folgt aus $g \in L^1(S_0, \sigma)$, dass

$$\int_{S_0} \langle z, s^E u \rangle^2 g(u) \sigma(du) \leq (C \|z\| \|s^E\|)^2 \int_{S_0} g(u) \sigma(du) < \infty$$

gilt. Der Satz von der majorisierten Konvergenz impliziert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} f_{\epsilon, h}(s) = 0.$$

Da die Funktion q gleichmäßig beschränkt ist, ist die Funktion $f_{\epsilon, h}(s)$ für alle $\epsilon > 0$ und $h > 0$ durch die Funktion

$$f(s) := M \int_{S_0} 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < 1\}} \langle z, s^E u \rangle^2 \sigma(du)$$

beschränkt. Da σ ein endliches Maß auf S_0 ist, folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(s) \frac{ds}{s^2} &\leq MC \|z\|^2 \int_0^\infty \int_{S_0} 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < 1\}} \|s^E u\|_0^2 \sigma(du) s^{-2} ds \\ &\leq MC \|z\|^2 \int_0^\infty \int_{S_0} 1_{\{0 < \tau(s^E u) < 1\}} \tau(s^E u)^{2(a_1 - \delta)} \sigma(du) \frac{ds}{s^2} \\ &= MC \|z\|^2 \sigma(S_0) \int_0^1 s^{2(a_1 - \delta) - 2} ds \\ &= \frac{MC \|z\|^2 \sigma(S_0)}{2(a_1 - \delta) - 1} < \infty \end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$. Damit folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\{0 < \|x\|_0 < \epsilon\}} \langle z, x \rangle^2 \phi_h(dx) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_{S_0} 1_{\{0 < \|s^E u\|_0 < \epsilon\}} \langle z, s^E u \rangle^2 q(sh, u) \sigma(du) s^{-2} ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Wegen der Bedingung (3.43) gilt $E\|X(1)\|_0^2 < \infty$. Somit bilden

$$Z(t, h) = h^{-\frac{1}{2}I} X_h(t) - b'_h(t)$$

mit $t \geq 0$ für jedes $h > 0$ einen Lévy-Prozess mit Erwartungswert gleich Null. Für $Z(1, h)$ mit Verteilung $\nu_{2,h}$ ist die charakteristische Funktion von der Form

$$\hat{\nu}_{2,h}(y) = \exp \left(\int_{\Gamma} \left(e^{i\langle y, x \rangle} - 1 - i\langle y, x \rangle \right) \phi^h(dx) \right).$$

Dabei ist $\phi^h = h(h^{-\frac{1}{2}I}\phi)$. Es reicht die Konvergenz im Punkt $t = 1$ zu zeigen. Dies geht analog zum Beweis von Satz 3.1.23 (ii). \square

Unter geeigneter Raum- und Zeitskalierung sowie geeigneter Zentrierung verhält sich ein $GTOSE$ Lévy-Prozess auf kurze Zeit wie einen (t^E) operator stabiler Lévy-Prozess und auf lange Zeit hin wie eine Brownsche Bewegung.

Lemma 3.3.6. *Sei μ_0 die zugehörige (t^E) operator stabile Verteilung einer $GTOSE$ Verteilung μ . Dann ist das Lévy-Maß ϕ von μ in Null regulär variierend mit Exponent E .*

Beweis ϕ_0 ist \mathcal{M} -voll, da μ_0 voll ist.

Aus dem Beweis von Satz 3.3.5 Teil (i) folgt $h(h^{-E}\phi) \rightarrow \phi_0$ in \mathcal{M} für $h \rightarrow 0$. Das ist äquivalent zu $\frac{1}{n}(n^E\phi) \rightarrow \phi_0$ in \mathcal{M} für $n \rightarrow \infty$. Außerdem ist die Folge $(n^E)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Beispiel 2.1.8 regulär variierend mit Index E . E ist invertierbar, da die Realteile seiner Eigenwerte strikt größer als Null sind. Proposition 2.1.13 (i) liefert dann die Behauptung. \square

Wir haben in diesem Kapitel TOS_E^ρ , TOS_E und $GTOSE$ Verteilungen definiert. TOS_E^ρ und TOS_E Verteilungen sind charakterisiert durch eine $d \times d$ Matrix, den sogenannten **Exponent** und **das Rosiński-Maß** R . Sie können Momente beliebiger Ordnung haben und erfüllen die Eigenschaft des **Kurz- und Langzeitverhalten** (siehe Satz 3.1.23 und 3.2.8). Da bei $GTOSE$ Verteilungen **die Tempering-Funktion** keine explizite Darstellung hat, können wir nur das Kurz- und Langzeitverhalten (siehe Satz 3.3.5) beweisen. Nach Definition 2.2.1 können wir eine (t^E) operator stabile Verteilung als die Grenzverteilung von affinen Transformationen einer Summe unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvektoren erhalten, deshalb stellt sich die Frage, ob die TOS_E^ρ Verteilung als Grenzverteilung auftreten kann? Die Antwort auf diese Frage findet sich im nächsten Kapitel.

Kapitel 4

$pTOS_E$ Verteilung als Grenzverteilung einer tempered Irrfahrt

4.1 Tempered Irrfahrt

Wir werden in diesem Kapitel eine Irrfahrt konstruieren, die gegen eine $pTOS_E$ Verteilung konvergiert. Unsere Haupthilfsmittel in diesem Kapitel ist der Konvergenzsatz für infinitesimale Dreieckssysteme von Zufallsvektoren, siehe Theorem 3.2.2 in [18]. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Funktion $r \mapsto q(r, u)$ vollständig monoton mit $q(\infty, u) = 0$ und $q(0^+, u) = 1$ für alle $u \in S_0$ ist. Außerdem sei zusätzlich $u \mapsto q(r, u)$ stetig für alle $r > 0$. ν sei im Folgenden eine \mathbb{R}^d -wertige (t^E) operator stabile Verteilung mit Lévy-Maß ϕ_0 und ohne Gaußanteil. Sei weiter X ein Zufallsvektor mit Verteilung η . Wir nehmen an, dass $\eta \in GDOA(\nu)$ gilt, d. h. η gehört zum verallgemeinerten Anziehungsbereich der operator stabilen Verteilung ν . Nach Satz 2.2.5 ist die letzte Voraussetzung äquivalent zu der Existenz einer Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in RV(-E)$, so dass

$$nP \{A_n X \in \cdot\} \rightarrow \phi_0(\cdot) \quad \text{in } \mathcal{M} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

oder äquivalent

$$nP \{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \rightarrow \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \quad \text{in } \mathcal{M} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Definition 4.1.1. Sei $\pi : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$\pi(r, u) := r \int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2}. \quad (4.3)$$

Im folgenden Satz sammeln wir ein paar Eigenschaften der Funktion π .

Satz 4.1.2. Eigenschaften der Funktion π :

- (i) $\frac{\partial \pi(r, u)}{\partial r} \leq 0$ für alle $u \in S_0$ und damit ist $r \mapsto \pi(r, u)$ für alle $u \in S_0$ monoton fallend.

(ii) Es gilt die Gleichung

$$q(r, u) = \pi(r, u) - r \frac{\partial \pi(r, u)}{\partial r}. \quad (4.4)$$

(iii) $\lim_{r \downarrow 0} \pi(r, u) = 1$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} \pi(r, u) = 0$ für alle $u \in S_0$.

(iv) Die Funktionen $u \mapsto \pi(r, u)$ und $u \mapsto \frac{\partial \pi(r, u)}{\partial r}$ sind für alle $r > 0$ stetig.

(v) Die Funktion $(r, u) \mapsto \pi(r, u)$ ist gemeinsam stetig.

Beweis

(i) Da die Funktion $r \mapsto q(r, u)r^{-2}$ stetig für alle $u \in S_0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(r, u)}{\partial r} &= \int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2} - r^{-1} q(r, u) \\ &= \int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2} - \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} q(r, u) \\ &= \int_r^\infty (q(s, u) - q(r, u)) \frac{ds}{s^2} \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass die Funktion $r \mapsto q(r, u)$ monoton fallend ist.

(ii) Die Behauptung folgt aus der Definition der Funktion π durch Multiplizieren von (4.5) mit r .

(iii) Da $\int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2} \geq \int_r^1 q(s, u) \frac{ds}{s^2} \geq q(1, u) \int_r^1 \frac{ds}{s^2} \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow 0$ gilt, folgt

$$\lim_{r \downarrow 0} \int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2} = \infty$$

für alle $u \in S_0$. Damit folgt nach der Regel von L'Hôpital

$$\lim_{r \downarrow 0} \pi(r, u) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2}}{r^{-1}} = \lim_{r \downarrow 0} \frac{-q(r, u)r^{-2}}{-r^{-2}} = \lim_{r \downarrow 0} q(r, u) = 1$$

für alle $u \in S_0$. Es gilt $0 \leq \int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2} \leq \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} = r^{-1}$, weil die Funktion $r \mapsto q(r, u)$ monoton fallend ist und $\lim_{r \downarrow 0} q(r, u) = 1$ für alle $u \in S_0$ gilt. Daraus folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2} = 0$$

für alle $u \in S_0$. Nochmal die Regel von L'Hôpital angewandt folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pi(r, u) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2}}{r^{-1}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-q(r, u)r^{-2}}{-r^{-2}} = \lim_{r \rightarrow \infty} q(r, u) = 0$$

für alle $u \in S_0$.

(iv) Sei $r > 0$ fest und seien $u_n, u \in S_0$ für $n \in \mathbb{N}$, so dass $u_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$ ist. Es gilt

$$\pi(r, u_n) = r \int_r^\infty q(s, u_n) \frac{ds}{s^2}.$$

Nach den Voraussetzungen an die Funktion q gilt $q(r, u_n) \leq 1$ für alle $r > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} q(r, u_n) = q(r, u)$. Außerdem gilt $r \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} = 1$. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(r, u_n) = \pi(r, u),$$

d. h. $u \mapsto \pi(r, u)$ ist stetig für alle $r > 0$. Wegen (4.4) ist $u \mapsto \frac{\partial \pi(r, u)}{\partial r}$ als Summe stetiger Funktionen wieder stetig für alle $r > 0$.

(v) Seien $r_n \rightarrow r > 0$ und $u_n \rightarrow u \in S_0$ für $n \rightarrow \infty$.

$$\pi(r_n, u_n) = r_n \int_{r_n}^\infty q(s, u_n) \frac{ds}{s^2} = \int_0^\infty 1_{\{s \geq r_n\}} r_n q(s, u_n) \frac{ds}{s^2} = \int_0^\infty g_n(s) \frac{ds}{s^2}.$$

Es gilt $g_n(s) \leq 1_{\{s \geq r_n\}} r_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g_n(s) \rightarrow 1_{\{s \geq r\}} r q(s, u)$ für $n \rightarrow \infty$ wegen der Stetigkeit der Funktion $q(r, u)$ in $u \in S_0$ für alle $r > 0$. Es gilt weiter $1_{\{s \geq r_n\}} r_n \rightarrow 1_{\{s \geq r\}} r$ für $n \rightarrow \infty$. Außerdem ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n \int_{r_n}^\infty \frac{ds}{s^2} = 1 = r \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} < \infty.$$

Der Konvergenzsatz von Lebesgue, siehe Theorem 1.21 auf Seite 12 in [16], liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(r_n, u_n) = r \int_r^\infty q(s, u) \frac{ds}{s^2} = \pi(r, u).$$

Somit ist die Funktion $(r, u) \mapsto \pi(r, u)$ gemeinsam stetig.

□

Aus den oben genannten Eigenschaften folgt, dass die Funktion $r \mapsto 1 - \pi(r, u)$ für jede $u \in S_0$ eine Verteilungsfunktion ist. Damit können wir eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(0, \infty)$ durch

$$\Pi(dr, u) = -\frac{\partial \pi(r, u)}{\partial r} dr \tag{4.6}$$

für $u \in S_0$ definieren. Da die Funktion q messbar ist, ist für jede Borel'sche Menge $A \subset (0, \infty)$ die Abbildung $\Pi(A, \cdot) : S_0 \rightarrow [0, 1]$ messbar. Damit existiert für $n \geq 1$ eine $(0, \infty)$ -wertige Zufallsvariable Z_n , deren bedingte Verteilung gegeben $A_n X$ $\Pi(\cdot, l(A_n X))$ ist, d. h.

$$P\{Z_n \in \cdot | A_n X\} = \Pi(\cdot, l(A_n X)). \tag{4.7}$$

Wir setzen

$$Y_n := (Z_n \wedge \tau(A_n X))^E l(A_n X). \tag{4.8}$$

Lemma 4.1.3. Sei Y_n gegeben durch (4.8). Dann gilt

$$nP\{Y_n \in \cdot\} \rightarrow \phi(\cdot) \quad \text{in } \mathcal{M} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Um Lemma 4.1.3 zu beweisen, brauchen wir folgendes Ergebnis der schwachen Konvergenz.

Lemma 4.1.4. Sei der metrische Raum \mathcal{S} versehen mit der Borelschen Sigma-Algebra. Sei weiter $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf \mathcal{S} und μ sei ein endliches Maß auf \mathcal{S} . Wenn $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen μ konvergiert, dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n \leq \int f d\mu$$

für alle beschränkten und oberhalbstetigen Funktionen $f : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$.

Beweis (siehe Lemma 4.2. in [5]). Da f beschränkt und nicht-negativ ist, können wir

o. B. d. A. annehmen, dass $0 \leq f < 1$ gilt. Für $k \geq 1$ setze $f_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 1_{(f^{-1}[\frac{i-1}{k}, 1])}$.

Es ist einfach zu zeigen, dass $f \leq f_k \leq f + \frac{1}{k}$ für alle $k \geq 1$. Da f oberhalbstetig ist, ist $f^{-1}[\frac{i-1}{k}, 1)$ eine abgeschlossene Menge. Damit folgt mit Portmanteau für festes $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_k d\mu_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_n \left(f^{-1} \left[\frac{i-1}{k}, 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n \left(f^{-1} \left[\frac{i-1}{k}, 1 \right) \right) \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu \left(f^{-1} \left[\frac{i-1}{k}, 1 \right) \right) \\ &= \int f_k d\mu \leq \int f d\mu + \frac{1}{k} \mu(\mathcal{S}). \end{aligned}$$

Da μ ein endliches Maß ist, folgt die Behauptung. \square

Beweis von Lemma 4.1.3 Um die Behauptung zu beweisen, reicht es Folgendes nach dem Theorem von Portmanteau in \mathcal{M} (siehe Proposition 1.2.19 auf Seite 13 im Buch [18]) zu zeigen :

- (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} nP\{Y_n \in A\} \leq \phi(A)$ für alle abgeschlossenen Mengen $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $\text{dist}(A, 0) > 0$ und
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} nP\{Y_n \in B_\epsilon^c\} = \phi(B_\epsilon^c)$ für alle $\epsilon > 0$, wobei $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : \tau(x) < \epsilon\}$, denn: Für jede offene Menge $D \subset \Gamma$ mit $\text{dist}(D, 0) > 0$ existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $D \subset B_\epsilon^c$ gilt. Da $B_\epsilon^c \setminus D$ abgeschlossen ist, folgt mit (i) und (ii)

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(D) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mu_n(B_\epsilon^c) - \mu_n(B_\epsilon^c \setminus D)) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B_\epsilon^c) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B_\epsilon^c \setminus D) \\ &\geq \phi(B_\epsilon^c) - \phi(B_\epsilon^c \setminus D) = \phi(D), \end{aligned}$$

wobei $\mu_n(\cdot) = nP\{Y_n \in \cdot\}$ ist.

(i) Sei $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ abgeschlossen mit $\text{dist}(A, 0) > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& nP \{Y_n \in A\} \\
&= nP \left\{ (Z_n \wedge \tau(A_n X))^E l(A_n X) \in A \right\} \\
&= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_A((z \wedge r)^E u) P \{Z_n \in dz, \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_A((z \wedge r)^E u) P \{Z_n \in dz | \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&\quad P \{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_A((z \wedge r)^E u) \Pi(dz, u) P \{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Funktion

$$G(r, u) = \int_0^\infty 1_A((z \wedge r)^E u) \Pi(dz, u)$$

oberhalbstetig ist. Dazu seien $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen, so dass $r_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $r_n \rightarrow r$ für $n \rightarrow \infty$ und $u_n \in S_0$ mit $u_n \rightarrow u \in S_0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann folgt aus dem Lemma von Fatou und der Stetigkeit der Funktion $u \mapsto \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z}$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} G(r_n, u_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty 1 - 1_{A^c}((z \wedge r_n)^E u_n) \Pi(dz, u_n) \\
&= 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(- \int_0^\infty 1_{A^c}((z \wedge r_n)^E u_n) \Pi(dz, u_n) \right) \\
&= 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty 1_{A^c}((z \wedge r_n)^E u_n) \Pi(dz, u_n) \\
&= 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty 1_{A^c}((z \wedge r_n)^E u_n) \left(- \frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} \right) dz \\
&\leq 1 - \int_0^\infty \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[1_{A^c}((z \wedge r_n)^E u_n) \left(- \frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} \right) \right] dz \\
&= 1 - \int_0^\infty \left(- \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right) \liminf_{n \rightarrow \infty} 1_{A^c}((z \wedge r_n)^E u_n) dz \\
&\leq 1 - \int_0^\infty \left(- \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right) 1_{A^c}((z \wedge r)^E u) dz \\
&= \int_0^\infty 1_A((z \wedge r)^E u) \Pi(dz, u) = G(r, u).
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Stetigkeit von $(r, u) \mapsto r^E u$ (siehe Proposition 2.2.11 auf Seite 30 in [18]) und der Definition der Unterhalbstetigkeit, denn A^c ist genau dann offen, wenn 1_{A^c} unterhalbstetig ist, siehe dazu Beispiel (2.4.2) Seite 98-99 in [12]. Wegen (4.2) konvergiert die Einschränkung von $nP \{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\}$ auf $B_{r_0}^c = \{x \in \mathbb{R}^d : \tau(x) \geq r_0\}$ schwach gegen die Einschränkung von $\frac{dr}{r^2} \sigma(du)$ auf $B_{r_0}^c$. Dabei ist $\frac{dr}{r^2} \sigma(du)$ auf $B_{r_0}^c$ nach

den Eigenschaften des Lévy-Maßes ein endliches Maß. Da $\text{dist}(A, 0) > 0$ ist, existiert ein r_0 , so dass $A \subset B_{r_0}^c$ ist. Lemma 4.1.4 liefert

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nP \{Y_n \in A\} \leq \int_{S_0} \int_0^\infty G(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du). \quad (4.10)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} G(r, u) &= \int_0^\infty 1_A((z \wedge r)^E u) \Pi(dz, u) \\ &= \int_r^\infty 1_A(r^E u) \Pi(dz, u) + \int_0^r 1_A(z^E u) \Pi(dz, u) \\ &= 1_A(r^E u) \pi(r, u) - \int_0^r 1_A(z^E u) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Einsetzen in (4.10) ergibt mit Fubini und (4.4)

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \int_0^\infty G(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) \pi(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &\quad - \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_A(z^E u) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) \pi(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &\quad - \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(z^E u) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \int_z^\infty \frac{dr}{r^2} dz \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) \pi(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &\quad - \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(z^E u) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} z^{-1} dz \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) \left(\pi(r, u) - r \frac{\partial \pi(r, u)}{\partial r} \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) q(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) = \phi(A). \end{aligned}$$

(ii) Nach (i), (iii) und (iv) aus Satz 4.1.2 sowie der Stetigkeit von $x \mapsto l(x)$ ist die Funktion $\pi_\epsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$, $\pi_\epsilon(x) = \pi(\epsilon, l(x))$ stetig und beschränkt für alle $0 < \epsilon \leq 1$. Die Menge $B_\epsilon^c = \{x \in \Gamma : \tau(x) \geq \epsilon\}$ ist eine ϕ_0 -Stetigkeitsmenge mit $\text{dist}(B_\epsilon^c, 0) > 0$. Mit Proposition 1.2.20 in [18] folgt dann aus (4.1) und (4.3)

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} nP \{Y_n \in B_\epsilon^c\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} nP \left\{ (Z_n \wedge \tau(A_n X))^E l(A_n X) \in B_\epsilon^c \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} nP \{Z_n \wedge \tau(A_n X) \geq \epsilon\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} nP \{Z_n \geq \epsilon, \tau(A_n X) \geq \epsilon\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{S_0} \int_\epsilon^\infty \int_\epsilon^\infty P \{Z_n \in dz, \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{S_0} \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\epsilon}^{\infty} \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{S_0} \int_{\epsilon}^{\infty} \pi(\epsilon, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{B_{\epsilon}^c} \pi_{\epsilon}(x) P \{ A_n X \in dx \} \\
&= \int_{B_{\epsilon}^c} \pi_{\epsilon}(x) \phi_0(x) \\
&= \int_{S_0} \int_{\epsilon}^{\infty} \pi(\epsilon, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\
&= \int_{S_0} \epsilon^{-1} \pi(\epsilon, u) \sigma(du) \\
&= \int_{S_0} \int_{\epsilon}^{\infty} q(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) = \phi(B_{\epsilon}^c).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt dann aus (i) und (ii)

$$nP \{ Y_n \in \cdot \} \rightarrow \phi(\cdot) \quad \text{in } \mathcal{M} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

□

Lemma 4.1.5. Sei Y_n definiert durch (4.8). Es gilt dann

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{E} \left(\|Y_n\|_0^2 1_{\{\|Y_n\|_0 \leq \epsilon\}} \right) = 0. \quad (4.11)$$

Beweis Nach Definition von Y_n gilt

$$\begin{aligned}
&n \mathbb{E} \left(\|Y_n\|_0^2 1_{\{\|Y_n\|_0 \leq \epsilon\}} \right) \\
&= n \int_{S_0} \int_0^{\infty} \int_r^{\infty} \|r^E u\|_0^2 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&+ n \int_{S_0} \int_0^{\infty} \int_0^r \|z^E u\|_0^2 1_{\{\|z^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Seien $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)^T$ die Standardbasis von \mathbb{R}^d . Da alle Normen auf \mathbb{R}^d äquivalent sind, gilt

$$\|x\|_0^2 \leq C \|x\|^2 = C \sum_{k=1}^d \langle x, e_k \rangle^2 \quad (4.12)$$

für eine Konstante $C > 0$. Außerdem folgt nach Cauchy-Schwarz in \mathbb{R}^d

$$|\langle x, e_k \rangle| \leq \|x\| \|e_k\| = \|x\| \leq \tilde{C} \|x\|_0 \quad (4.13)$$

für eine Konstante $\tilde{C} > 0$. Da $\int_r^\infty \Pi(dz, u) \leq 1$ ist, folgt mit $\epsilon_1 = \tilde{C}\epsilon$

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|r^E u\|_0^2 P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&\stackrel{(4.12)}{\leq} Cn \sum_{k=1}^d \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \langle r^E u, e_k \rangle^2 P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&\stackrel{(4.13)}{\leq} C \sum_{k=1}^d n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{|\langle r^E u, e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}} \langle r^E u, e_k \rangle^2 P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&= C \sum_{k=1}^d I_{1k}.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
I_{1k} &= n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{|\langle r^E u, e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}} \langle r^E u, e_k \rangle^2 P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&= n \int_\Gamma 1_{\{|\langle x, e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}} \langle x, e_k \rangle^2 P \{ A_n X \in dx \} \\
&= n \mathbb{E} \left(\langle A_n X, e_k \rangle^2 1_{\{|\langle A_n X, e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}} \right) \\
&= n \mathbb{E} \left(\langle X, A_n^* e_k \rangle^2 1_{\{|\langle X, A_n^* e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}} \right).
\end{aligned}$$

Wir setzen $A_n^* e_k = r_{n,k} \theta_{n,k}$ für ein $r_{n,k} > 0$ und $\|\theta_{n,k}\| = 1$. Da $A_n \in RV(-E)$ ist, folgt mit Satz 2.1.9, dass $f(t) = A_{[t]}$ regulär variierend mit Index $-E$ ist. Damit liefert Beispiel 2.1.2 $(f(t)^*)^{-1} \in RV(E^*)$. Da die Realteile der Eigenwerte von E und E^* gleich sind, folgt aus Korollar 2.1.6 (mit $\alpha = 0$),

$$r_{n,k} = \|r_{n,k} \theta_{n,k}\| = \|f(n)^* e_k\| = \left\| \left((f(n)^*)^{-1} \right)^{-1} e_k \right\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
I_{1k} &= n \mathbb{E} \left(\langle X, r_{n,k} \theta_{n,k} \rangle^2 1_{\{|\langle X, r_{n,k} \theta_{n,k} \rangle| \leq \epsilon_1\}} \right) \\
&= nr_{n,k}^2 \mathbb{E} \left(\langle X, \theta_{n,k} \rangle^2 1_{\{|\langle X, \theta_{n,k} \rangle| \leq \epsilon_1 r_{n,k}^{-1}\}} \right) \\
&= nr_{n,k}^2 U_2(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}).
\end{aligned}$$

Das Theorem von Portmanteau in \mathcal{M} und (4.1) implizieren, dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} nV_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} nP \left\{ |\langle X, \theta_{n,k} \rangle| > r_{n,k}^{-1} \right\} \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} nP \left\{ |\langle X, r_{n,k} \theta_{n,k} \rangle| > 1 \right\} \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} nP \left\{ |\langle X, A_n^* e_k \rangle| \geq 1 \right\} \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} nP \left\{ |\langle A_n X, e_k \rangle| \geq 1 \right\} \\
&\leq \phi_0 \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |\langle x, e_k \rangle| \geq 1 \right\} \\
&=: C(e_k).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dabei ist $C(e_k) < \infty$ eine Konstante, die vom Vektor e_k abhängt. Da $a_1 > \frac{1}{2}$ ist, können wir $\gamma > 0$ so wählen, dass $\gamma' = 2 - \gamma - \frac{1}{a_1} > 0$ ist. Nach Satz 2.2.5 (ii) ist die Verteilung η von X in $RVM_\infty(E)$ mit Grenzmaß ϕ_0 . Aus Satz 2.1.15 (i) gilt damit $\eta \in ROV_\infty(E, c)$ für jedes $c \geq 1$. Somit folgt aus Satz 2.1.19, dass V_0 gleichmäßig R-O variierend ist und es existiert eine Konstante $c_1 > 0$, so dass für alle $0 < \epsilon_1 < 1$

$$\frac{V_0\left(\epsilon_1^{-1}(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}), \theta_{n,k}\right)}{V_0\left(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}\right)} \geq c_1 (\epsilon_1^{-1})^{-\gamma - \frac{1}{a_1}} = c_1 \epsilon_1^{\gamma + \frac{1}{a_1}} \quad (4.16)$$

für n groß genug gilt. Außerdem impliziert Korollar 2.1.20 (ii), dass wir für ein $m_2 > 0$ für alle $0 < \epsilon_1 < 1$

$$\frac{(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1})^2 V_0(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{U_2(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \geq m_2 \quad (4.17)$$

für n groß genug haben. (4.15), (4.16) und (4.17) implizieren zusammen

$$\begin{aligned} & nr_{n,k}^2 U_2(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) \\ &= \epsilon_1^2 \frac{U_2(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1})^2 V_0(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \frac{V_0(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{V_0(\epsilon_1^{-1}(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}), \theta_{n,k})} n V_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) \\ &\leq \epsilon_1^2 m_2^{-1} c_1^{-1} \epsilon_1^{-\gamma - \frac{1}{a_1}} (C(e_k) + 1) \\ &= C \epsilon_1^{\gamma'} \end{aligned}$$

für alle $0 < \epsilon_1 < 1$ und für alle n groß genug, wobei $C = \frac{C(e_k)+1}{m_2 c_1} > 0$ und $\gamma' = 2 - \gamma - \frac{1}{a_1} > 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} I_2 &= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|z^E u\|_0^2 \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 \leq \epsilon\} \cup \{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|z^E u\|_0^2 \Pi(dz, u) \\ &\quad P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &= n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \int_0^r \|z^E u\|_0^2 \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &\quad + n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 \leq \epsilon, \|r^E u\|_0 > \epsilon\}} \|z^E u\|_0^2 \Pi(dz, u) \\ &\quad P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &= I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

Da die Funktion $z \mapsto \|z^E u\|_0$ streng monoton wachsend und $\int_0^r \Pi(dz, u) \leq 1$ für alle $u \in S_0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} I_{21} &\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|r^E u\|_0^2 \int_0^r \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|r^E u\|_0^2 P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\}. \end{aligned}$$

Damit gilt analog zu I_1

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{21} = 0.$$

Desweiteren folgt aus (4.1), dem Theorem von Portmanteau in \mathcal{M} und Lemma 2.3.1

$$\begin{aligned} I_{22} &\leq \epsilon^2 n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^{Eu}\|_0 \leq \epsilon, \|r^{Eu}\|_0 > \epsilon\}} \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\ &\leq \epsilon^2 n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|r^{Eu}\|_0 \geq \epsilon\}} \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\ &\leq \epsilon^2 n P \{ \|A_n X\|_0 \geq \epsilon \} \\ &\leq \epsilon^2 (\phi_0 \{x \in \Gamma : \|x\|_0 \geq \epsilon\} + 1) \\ &= \epsilon^2 \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^{Eu}\|_0 \geq \epsilon\}} \frac{dr}{r^2} \sigma(du) + \epsilon^2 \\ &= \epsilon^2 \int_{S_0} \int_0^\infty \left(1 - 1_{\{\|r^{Eu}\|_0 < \epsilon\}} \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) + \epsilon^2 \\ &\leq \epsilon^2 \int_{S_0} \int_0^\infty \left(1 - 1_{\{r < C_1 \epsilon^{\frac{1}{a_1 - \delta}}\}} \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) + \epsilon^2 \\ &= \epsilon^2 \int_{S_0} \int_0^\infty \left(1_{\{r \geq C_1 \epsilon^{\frac{1}{a_1 - \delta}}\}} \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) + \epsilon^2 \\ &= C_1^{-1} \epsilon^{2 - \frac{1}{a_1 - \delta}} + \epsilon^2 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, für ein $C_1 > 0$ und $a_1 - \delta > \frac{1}{2}$. Damit gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{22} = 0.$$

Somit folgt die Behauptung (4.11). \square

Wir konstruieren jetzt die Irrfahrt wie folgt:

Seien $\{(X_j, Z_{nj}) : j \geq 1, n \geq 1\}$ unabhängige identisch verteilte Kopien von (X, Z_n) . Sei weiter

$$Y_{nj} = (Z_{nj} \wedge \tau(A_n X_j))^E l(A_n X_j) \quad (4.18)$$

für $n, j \geq 1$ mit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie oben definiert. Wir definieren **die tempered Irrfahrt** für $n, k \geq 1$ durch

$$S_n(k) = \sum_{j=1}^k Y_{nj}. \quad (4.19)$$

4.2 Grenzverteilung der tempered Irrfahrt

Der folgende Satz ist das Hauptergebnis in diesem Kapitel. Er zeigt, dass eine tempered Irrfahrt (4.19) mit einem geeigneten nichtzufälligen Zentrierungsvektor $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ in Verteilung gegen einen proper tempered operator stabilen Zufallsvektor konvergiert. Wir werden diese Behauptung mithilfe des Konvergenzsatzes für Dreieckssysteme zeigen.

Satz 4.2.1. *Sei $S_n(n)$ definiert wie in (4.19) für $n \geq 1$. Dann gilt*

$$S_n(n) - b_n \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Dabei besitzt Y die Verteilung μ mit charakteristischer Funktion

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_{\Gamma} \left(e^{i\langle \lambda, x \rangle} - 1 - i\langle \lambda, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}} \right) \phi(dx) \quad (4.21)$$

und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist definiert durch

$$b_n = n \int_{\{\|x\|_0 < 1\}} x P \{Y_{n1} \in dx\}. \quad (4.22)$$

Beweis Nach Konstruktion bilden die Y_{nj} für $1 \leq j \leq n$ und $n \in \mathbb{N}$ ein Dreieckssystem. Aus (ii) des Beweises von Lemma 4.1.3 folgt, dass dieses Dreieckssystem infinitesimal ist. Für alle θ mit $\|\theta\| = 1$ gilt mit Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \int_{\{\|x\|_0 < \epsilon\}} \langle x, \theta \rangle P \{Y_{n1} \in dx\} \\ & \leq \left(\int_{\{\|x\|_0 < \epsilon\}} P \{Y_{n1} \in dx\} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\{\|x\|_0 < \epsilon\}} \langle x, \theta \rangle^2 P \{Y_{n1} \in dx\} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\int_{\{\|x\|_0 < \epsilon\}} \langle x, \theta \rangle^2 P \{Y_{n1} \in dx\} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Cauchy-Schwarz in \mathbb{R}^d

$$\begin{aligned} n \left[\int_{\{\|x\|_0 < \epsilon\}} \langle x, \theta \rangle^2 P \{Y_{n1} \in dx\} - \left(\int_{\{\|x\|_0 < \epsilon\}} \langle x, \theta \rangle P \{Y_{n1} \in dx\} \right)^2 \right] \\ & \leq 2n \int_{\{\|x\|_0 < \epsilon\}} \langle x, \theta \rangle^2 P \{Y_{n1} \in dx\} \\ & \leq Cn \|\theta\|^2 \int_{\{\|x\|_0 < \epsilon\}} \|x\|_0^2 P \{Y_{n1} \in dx\} \\ & = Cn \mathbb{E} (\|Y_{n1}\|_0^2 1_{\{\|Y_{n1}\|_0 < \epsilon\}}). \end{aligned}$$

Somit liefert der Konvergenzsatz für Dreieckssysteme (siehe Theorem 3.2.2. auf Seite 52 in [18]) mit (4.9) und (4.11) die Behauptung. \square

Beispiel 4.2.2. Sei $E \in L(\mathbb{R}^d)$. Seine Eigenwerte besitzen Realteile a_1, \dots, a_p mit $p \leq d$. Die Realteile erfüllen die Eigenschaft $\frac{1}{2} < a_1 < \dots < a_p$. Sei weiter ν eine (t^E) operator stabile Verteilung mit Lévy-Maß ϕ_0 und Spektralmaß σ . U sei eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und ϑ sei nach $\frac{\sigma}{\sigma(S_0)}$ verteilt. U und ϑ seien unabhängig. Sei weiter q eine Borel-messbare Funktion mit $r \mapsto q(r, u)$ vollständig monoton mit $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r, u) = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} q(r, u) = 1$ für alle $u \in S_0$ und $u \mapsto q(r, u)$ stetig für alle $r > 0$. Wir Definieren π und Π wie oben. Z sei eine $(0, \infty)$ -wertige Zufallsvariable mit

$$P \left\{ Z \in \cdot \mid \left(\frac{nU}{\sigma(S_0)} \right)^{-E} \vartheta \right\} = P \{ Z \in \cdot \mid \vartheta \} = \Pi(\cdot, \vartheta).$$

Wir haben im Beispiel 2.2.6 gezeigt, dass $\left(\frac{U}{\sigma(S_0)} \right)^{-E} \vartheta \in GDOA(\nu)$ und

$$nP \left\{ n^{-E} \left(\frac{U}{\sigma(S_0)} \right)^{-E} \vartheta \in \cdot \right\} \rightarrow \phi_0(\cdot) \quad \text{in } \mathcal{M} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt. Seien $\{(U_j, \vartheta_j, Z_j) : j \geq 1\}$ unabhängige und identisch verteilte Kopien von (U, ϑ, Z) . Wir definieren für $n, j \geq 1$

$$Y_{nj} = \left(Z_j \wedge \left(\frac{nU_j}{\sigma(S_0)} \right)^{-1} \right)^E \vartheta_j$$

und

$$S_n(k) = \sum_{j=1}^k Y_{nj}.$$

Satz 4.2.1 liefert die Konvergenz dieser speziellen tempered Irrfahrt mit geeigneter Zentrierung gegen eine $pTOS_E$ Verteilung mit Lévy-Maß ϕ der Darstellung

$$\phi(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) q(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du)$$

für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$.

Satz 4.2.3. Sei $a_1 > 1$. Dann gilt

$$S_n(n) \Rightarrow \bar{Y} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dabei besitzt \bar{Y} die Verteilung μ_1 mit charakteristischer Funktion

$$\hat{\mu}_1(\lambda) = \exp \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle \lambda, x \rangle} - 1) \phi(dx) \right). \quad (4.23)$$

Beweis Es reicht zu zeigen, dass für b_n definiert durch (4.22)

$$b_n \rightarrow \int_{\{\|x\|_0 < 1\}} x \phi(dx) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (4.24)$$

gilt, denn $(S_n(n) - b_n) + b_n \Rightarrow Y + \int_{\{\|x\|_0 < 1\}} x\phi(dx)$ liefert $S_n(n) \Rightarrow \bar{Y}$. Dabei besitzt Y die charakteristische Funktion (4.21). Sei $0 < \epsilon < 1$. Es gilt

$$b_n = n \int_{\{\epsilon < \|x\|_0 < 1\}} xP\{Y_{n1} \in dx\} + n \int_{\{\|x\|_0 \leq \epsilon\}} xP\{Y_{n1} \in dx\} = I_3 + I_4.$$

Da die Abbildung $r \mapsto \|r^E u\|_0$ streng monoton wachsend und stetig ist, existiert genau ein s , so dass $\|s^E u\|_0 = \epsilon$. Damit folgt aus $q(r, u) \leq 1$ für alle $r > 0$ und $u \in S_0$

$$\begin{aligned} \phi(\{\|x\|_0 = \epsilon\}) &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 = \epsilon\}} q(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{r=s\}} q(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &\leq \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{r=s\}} \frac{dr}{r^2} \sigma(du) = 0. \end{aligned}$$

Analog gilt $\phi(\{\|x\|_0 = 1\}) = 0$. $A_\epsilon = \{\epsilon < \|x\|_0 < 1\}$ ist eine ϕ -Stetigkeitsmenge mit $\text{dist}(A_\epsilon, 0) > 0$, denn $\phi(\partial A_\epsilon) = \phi(\{\|x\|_0 = \epsilon\}) + \phi(\{\|x\|_0 = 1\}) = 0$. Da die Konvergenz (4.9) gilt und die Identität stetig und beschränkt auf A_ϵ ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_3 = \int_{\{\epsilon < \|x\|_0 < 1\}} x\phi(dx).$$

Somit reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|I_4\|_0 = 0$$

gilt. Die Dreiecksungleichung liefert

$$\begin{aligned} \|I_4\|_0 &\leq n \int_{\{\|x\|_0 \leq \epsilon\}} \|x\|_0 P\{Y_{n1} \in dx\} \\ &= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_r^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|r^E u\|_0 \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &\quad + n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &= I_{41} + I_{42}. \end{aligned}$$

Da alle Normen auf \mathbb{R}^d äquivalent sind, folgt aus (4.13) mit $\epsilon_1 = \tilde{C}\epsilon$

$$\begin{aligned} I_{41} &\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|r^E u\|_0 P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &\leq C \sum_{k=1}^d n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} |\langle r^E u, e_k \rangle| P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &\leq C \sum_{k=1}^d n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{|\langle r^E u, e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}} |\langle r^E u, e_k \rangle| P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\ &= C \sum_{k=1}^d J_k. \end{aligned}$$

Wir setzen $A_n^* e_k = r_{n,k} \theta_{n,k}$ mit $r_{n,k} > 0$ und $\|\theta_{n,k}\| = 1$. Nach (4.14) konvergiert $r_{n,k}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Damit gilt

$$\begin{aligned}
J_k &= n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{|\langle r^E u, e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}} |\langle r^E u, e_k \rangle| P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&= n \int_\Gamma 1_{\{|\langle x, e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}} |\langle x, e_k \rangle| P \{ A_n X \in dx \} \\
&= n \mathbb{E} (|\langle A_n X, e_k \rangle| 1_{\{|\langle A_n X, e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}}) \\
&= n \mathbb{E} (|\langle X, A_n^* e_k \rangle| 1_{\{|\langle X, A_n^* e_k \rangle| \leq \epsilon_1\}}) \\
&= nr_{n,k} \mathbb{E} (|\langle X, \theta_{n,k} \rangle| 1_{\{|\langle X, \theta_{n,k} \rangle| \leq \epsilon_1 r_{n,k}^{-1}\}}) \\
&= nr_{n,k} U_1(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}).
\end{aligned}$$

Aus $\eta \in GDOA(\nu)$ folgt mit Satz 2.2.5 (ii), dass $\eta \in RVM_\infty(E)$ mit Grenzmaß ϕ_0 ist. Damit liefert Satz 2.1.15 (i), dass $\eta \in ROV_\infty(E, c)$ für alle $c \geq 1$ ist. Da $a_1 > 1$ ist, können wir $\gamma > 0$ wählen, so dass $1 - \gamma > \frac{1}{a_1}$ ist. Satz 2.1.19 impliziert die kompakt gleichmäßige R-O Variation von V_0 und die Existenz der Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 < \infty$, so dass

$$c_1(\epsilon_1^{-1})^{-\gamma - \frac{1}{a_1}} \leq \frac{V_0(\epsilon_1^{-1}(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}), \theta_{n,k})}{V_0(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \leq c_2(\epsilon_1^{-1})^{\gamma - \frac{1}{a_1}}$$

für alle n groß genug, alle $0 < \epsilon_1 < 1$ und alle $\|\theta_{n,k}\| = 1$ gilt. Da V_0 gleichmäßig R-O variierend in $\|\theta\| = 1$ ist, folgt aus Korollar 2.1.20 (ii), dass für ein $m_2 > 0$

$$\frac{\epsilon_1 r_{n,k}^{-1} V_0(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{U_1(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \geq m_2$$

für alle $\|\theta\| = 1$ und für alle n groß genug gilt. Wegen (4.15) gilt dann

$$\begin{aligned}
J_k &= nr_{n,k} U_1(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) \\
&= \epsilon_1 \frac{U_1(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{\epsilon_1 r_{n,k}^{-1} V_0(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \frac{V_0(\epsilon_1 r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{V_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} n V_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) \\
&\leq \epsilon_1 m_2^{-1} c_1^{-1} \epsilon_1^{-\gamma - \frac{1}{a_1}} (C(e_k) + 1) = C \epsilon_1^{\gamma'}
\end{aligned}$$

für alle n groß genug mit $C = \frac{C(e_k) + 1}{m_2 c_1}$ und $\gamma' = 1 - \gamma - \frac{1}{a_1} > 0$. Damit folgt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{41} = 0.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
I_{42} &= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
&\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 \leq \epsilon\} \cup \{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) \\
&\quad P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 \leq \epsilon, \|r^E u\|_0 > \epsilon\}} \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) \\
&\quad P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&+ n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&= K_1 + K_2.
\end{aligned}$$

Das Theorem von Portmanteau in \mathcal{M} liefert aus (4.1)

$$\begin{aligned}
K_1 &\leq \epsilon n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 \leq \epsilon, \|r^E u\|_0 > \epsilon\}} \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&\leq \epsilon n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > \epsilon\}} P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&\leq \epsilon n \int_\Gamma 1_{\{\|x\|_0 \geq \epsilon\}} P\{A_n X \in dx\} \\
&= \epsilon n P\{\|A_n X\|_0 \geq \epsilon\} \\
&\leq \epsilon(\phi_0\{x \in \Gamma : \|x\|_0 \geq \epsilon\} + 1) \\
&\leq C_1^{-1} \epsilon^{1 - \frac{1}{a_1 - \delta}} + \epsilon
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, für eine Konstante $C_1 > 0$ und ein $\delta > 0$ mit $a_1 - \delta > 1$, siehe I_{22} im Beweis von Lemma 4.1.5. Da $z \mapsto \|z^E u\|_0$ streng monoton wachsend ist, folgt

$$\begin{aligned}
K_2 &\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|r^E u\|_0 \int_0^r \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 \leq \epsilon\}} \|r^E u\|_0 P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\}.
\end{aligned}$$

Analog zum Beweis von I_{41} gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} K_2 = 0.$$

Es folgt aus Lemma 3.2.6

$$\int_{\{0 < \|x\|_0 < 1\}} \|x\|_0 \phi(dx) < \infty.$$

Dann hat die Grenzverteilung die charakteristische Funktion (4.23). Insgesamt folgt dann die Behauptung. \square

Satz 4.2.4. Sei $a_p < 1$. Sei weiter für ein $\delta' > 0$

$$\limsup_{r \downarrow 0} \sup_{u \in S_0} \frac{1 - q(r, u)}{r^{a_p + \delta'}} < \infty. \quad (4.25)$$

Dann gilt $S_n(n) - n\mathbb{E}(A_n X) \Rightarrow \tilde{Y}$ für $n \rightarrow \infty$, wobei \tilde{Y} die Verteilung μ_2 mit charakteristischer Funktion

$$\hat{\mu}_2(\lambda) = \exp\left(i\langle \lambda, m \rangle + \int_\Gamma \left(e^{i\langle \lambda, x \rangle} - 1 - i\langle \lambda, x \rangle\right) \phi(dx)\right) \quad (4.26)$$

besitzt. Dabei ist

$$m = - \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du). \quad (4.27)$$

Um Satz 4.2.4 zu zeigen, brauchen wir folgende Lemmata.

Lemma 4.2.5. *Es gelte die Eigenschaft (4.25). Dann ist m in (4.27) wohldefiniert.*

Beweis Die Dreiecksungleichung und die Monotonie der Abbildung $z \mapsto \|z^E u\|_0$ liefern

$$\begin{aligned}
\|m\|_0 &\leq \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r \|r^E u - z^E u\|_0 \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\
&\leq \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r \|r^E u\|_0 + \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\
&\leq 2 \int_{S_0} \int_0^\infty \|r^E u\|_0 \int_0^r \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\
&= 2 \left(\int_{S_0} \int_0^1 \|r^E u\|_0 (1 - \pi(r, u)) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \right. \\
&\quad \left. + \int_{S_0} \int_1^\infty \|r^E u\|_0 (1 - \pi(r, u)) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \right) \\
&= 2(m_1 + m_2).
\end{aligned}$$

Da $a_p < 1$ ist, existiert ein $\delta' > 0$, so dass $a_p + \delta' < 1$ ist. Aus $1 - \pi(r, u) \leq 1$ folgt

$$m_2 \leq C \int_{S_0} \int_1^\infty r^{(a_p + \delta') - 2} dr \sigma(du) = \frac{C \sigma(S_0)}{1 - (a_p + \delta')} < \infty.$$

Wir betrachten jetzt die Funktion $r \mapsto 1 - \pi(r, u)$. Wir definieren

$$K = \sup \left\{ \frac{1 - q(s, u)}{s^{a_p + \delta'}} : 0 < s \leq 1, u \in S_0 \right\}.$$

Nach Eigenschaft (4.25) ist $K < \infty$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
1 - \pi(r, u) &= r \int_r^\infty (1 - q(s, u)) \frac{ds}{s^2} \\
&= r \int_r^1 s^{(a_p + \delta') - 2} \frac{1 - q(s, u)}{s^{a_p + \delta'}} ds + r \int_1^\infty (1 - q(s, u)) \frac{ds}{s^2} \\
&\leq K r \int_r^1 s^{(a_p + \delta') - 2} ds + r \\
&= K' r (r^{(a_p + \delta') - 1} - 1) + r \\
&\leq K' r^{(a_p + \delta')} + r \\
&\leq C r^{(a_p + \delta')}
\end{aligned}$$

für $0 < r \leq 1$, da $a_p + \delta' < 1$ ist. Dabei ist $K' = \frac{K}{1 - (a_p + \delta')} > 0$ und $C = K' \vee 1$.

Somit gilt für $0 < r \leq 1$

$$1 - \pi(r, u) \leq C r^{(a_p + \delta')} = C \tau(r^E u)^{(a_p + \delta')} \leq C \|r^E u\|_0 \quad (4.28)$$

für eine Konstante $C > 0$, die entsprechend immer geändert wird. Aus (4.28) und $\frac{1}{2} < a_p - \delta' < 1$ für ein $\delta' > 0$ folgt mit Lemma 2.3.1 für ein $\delta > 0$ mit $a_1 - \delta > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
m_1 &\leq C \int_{S_0} \int_0^1 r^{(a_1 - \delta)} (1 - \pi(r, u)) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\
&\leq C \int_{S_0} \int_0^1 r^{(a_1 - \delta) + (a_p + \delta') - 2} dr \sigma(du) < \infty,
\end{aligned}$$

da $(a_1 - \delta) + (a_p + \delta') > 1$ ist. Das impliziert $\|m\|_0 \leq 2(m_1 + m_2) < \infty$ und damit die Behauptung. \square

Lemma 4.2.6. *Die Funktion $f(r, u) = \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u)$ ist gemeinsam stetig.*

Beweis Es gilt $f(r, u) = (r^E u)(1 - \pi(r, u)) - \int_0^r (z^E u) \Pi(dz, u)$. Nach Proposition 2.2.11 im Buch [18] ist die Abbildung $(r, u) \mapsto r^E u$ gemeinsam stetig und nach Satz 4.1.2 (v) ist die Abbildung $(r, u) \mapsto \pi(r, u)$ auch gemeinsam stetig. Damit ist die Funktion $(r, u) \mapsto (r^E u)(1 - \pi(r, u))$ gemeinsam stetig. Somit ist nur noch zu zeigen, dass die Funktion

$$(r, u) \mapsto - \int_0^r (z^E u) \Pi(dz, u) = \int_0^r (z^E u) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz$$

gemeinsam stetig ist. Seien $r_n \rightarrow r > 0$ und $u_n \rightarrow u \in S_0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{r_n} (z^E u_n) \frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} dz &= \int_0^{r_n} (z^E u_n) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz \\ &+ \int_0^{r_n} (z^E u_n) \left(\frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} - \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right) dz. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst das erste Integral. Es gilt

$$\int_0^{r_n} (z^E u_n) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz = \int_0^\infty 1_{\{z \leq r_n\}} (z^E u_n) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz = \int_0^\infty g_n(z) dz.$$

Da die Funktion $u \mapsto z^E u$ stetig ist, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = 1_{\{z \leq r\}} (z^E u) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z}$. Sei $R = \sup_{n \geq 1} r_n$. Da $r_n \rightarrow r$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, ist $R < \infty$. Desweiteren folgt aus der Monotonie der Funktion $z \mapsto \|z^E u\|_0$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|g_n(z)\|_0 &\leq \|z^E u_n\|_0 \left| \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right| 1_{\{z \leq R\}} \\ &\leq \|R^E\|_0 \left| \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right| 1_{\{z \leq R\}} \\ &\leq -\|R^E\|_0 \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \end{aligned}$$

und

$$-\|R^E\|_0 \int_0^\infty \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz = \|R^E\|_0 \int_0^\infty \Pi(dz, u) = \|R^E\|_0 < \infty$$

gilt. Der Satz von der majorisierten Konvergenz impliziert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{r_n} (z^E u_n) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz = \int_0^r (z^E u) \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz.$$

Wir werden jetzt zeigen, dass das zweite Integral gegen Null konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^{r_n} (z^E u_n) \left(\frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} - \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right) dz \right\|_0 \\
& \leq \int_0^R \|z^E u_n\|_0 \left| \frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} - \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right| dz \\
& \leq \|R^E\|_0 \int_0^R \left| \frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} - \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right| dz \\
& \leq \|R^E\|_0 \int_0^\infty \left| \frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} - \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right| dz.
\end{aligned}$$

Da $|a - b| = 2(a \vee b) - (a + b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left| \frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} - \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right| dz &= 2 \int_0^\infty \left(\frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} \vee \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right) dz \\
&\quad - \int_0^\infty \frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} dz - \int_0^\infty \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz \\
&= 2 \int_0^\infty \left(\frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} \vee \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right) dz + 2 \\
&= 2 \int_0^\infty h_n(z) dz + 2.
\end{aligned}$$

Es gilt $|h_n(z)| \leq -\frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z}$ und $-\int_0^\infty \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz = 1$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z) = \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z}$, da die Funktion $u \mapsto \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z}$ stetig für alle $z > 0$ ist. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty h_n(z) dz = \int_0^\infty \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} dz = -1$ und damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left| \frac{\partial \pi(z, u_n)}{\partial z} - \frac{\partial \pi(z, u)}{\partial z} \right| dz = 0.$$

Somit folgt, dass $(r, u) \mapsto f(r, u)$ gemeinsam stetig ist. \square

Beweis von Satz 4.2.4 Da $a_p < 1$ ist, existiert ein $\delta' > 0$ mit $a_p + \delta' < 1$. Damit existiert der Erwartungswert der $pTOS_E$ -Verteilung. Das impliziert $\int 1_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x \phi(dx)$ existiert. Damit folgt aus Lemma 4.2.5, dass

$$m' = \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x \phi(dx) - m$$

wohldefiniert ist. Wir werden zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{E}(A_n X) - b_n = m'$$

ist. Dabei ist $b_n = n \int_{\{\|x\|_0 < 1\}} x P\{Y_{n1} \in dx\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
n\mathbb{E}(A_n X) - b_n &= n\mathbb{E}(A_n X) - n \int_{\{\|x\|_0 < 1\}} x P\{Y_{n1} \in dx\} \\
&\quad - n \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x P\{Y_{n1} \in dx\} + n \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x P\{Y_{n1} \in dx\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n\mathbb{E}(A_n X - Y_{n1}) + n \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x P\{Y_{n1} \in dx\} \\
&= I_5 + I_6.
\end{aligned}$$

Sei $1 < N < \infty$ fest. Dann gilt

$$\begin{aligned}
I_6 &= n \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x P\{Y_{n1} \in dx\} \\
&= n \int_{\{1 \leq \|x\|_0 \leq N\}} x P\{Y_{n1} \in dx\} + n \int_{\{\|x\|_0 > N\}} x P\{Y_{n1} \in dx\} \\
&= I_{61} + I_{62}.
\end{aligned}$$

Da die Identität gleichmäßig stetig und beschränkt auf $A = \{1 \leq \|x\|_0 \leq N\}$ mit $\phi(\partial A) = 0$ und $\text{dist}(A, 0) > 0$ ist, folgt aus (4.9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{61} = \int_{\{1 \leq \|x\|_0 \leq N\}} x \phi(dx).$$

Wir beweisen jetzt, dass wir I_{62} in der Norm beliebig klein für alle großen n wählen können, wenn $N > 1$ groß genug ist.

$$\begin{aligned}
\|I_{62}\|_0 &\leq n \int_{\{\|x\|_0 > N\}} \|x\|_0 P\{Y_{n1} \in dx\} \\
&= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_r^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} \|r^E u\|_0 \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&\quad + n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 > N\}} \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&= L_1 + L_2.
\end{aligned}$$

Da $\int_r^\infty \Pi(dz, u) \leq 1$ für alle $u \in S_0$ gilt und alle Normen auf \mathbb{R}^d äquivalent sind, folgt

$$\begin{aligned}
L_1 &\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} \|r^E u\|_0 P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&\leq C \sum_{k=1}^d n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} |\langle r^E u, e_k \rangle| P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&= C \sum_{k=1}^d L_{1k}.
\end{aligned}$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
L_{1k} &= n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} |\langle r^E u, e_k \rangle| P\{\tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du\} \\
&= n \int_{\Gamma} 1_{\{\|x\|_0 > N\}} |\langle x, e_k \rangle| P\{A_n X \in dx\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{\|x\|_0 > N, |\langle x, e_k \rangle| > N\}} |\langle x, e_k \rangle| P \{A_n X \in dx\} \\
&+ n \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{\|x\|_0 > N, |\langle x, e_k \rangle| \leq N\}} |\langle x, e_k \rangle| P \{A_n X \in dx\} \\
&\leq n \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{|\langle x, e_k \rangle| > N\}} |\langle x, e_k \rangle| P \{A_n X \in dx\} \\
&+ n \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{\|x\|_0 > N, |\langle x, e_k \rangle| \leq N\}} |\langle x, e_k \rangle| P \{A_n X \in dx\} \\
&= n \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{|\langle A_n x, e_k \rangle| > N\}} |\langle A_n x, e_k \rangle| P \{X \in dx\} \\
&+ n \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{\|x\|_0 > N, |\langle x, e_k \rangle| \leq N\}} |\langle x, e_k \rangle| P \{A_n X \in dx\} \\
&= n \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{|\langle x, A_n^* e_k \rangle| > N\}} |\langle x, A_n^* e_k \rangle| P \{X \in dx\} \\
&+ n \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{\|x\|_0 > N, |\langle x, e_k \rangle| \leq N\}} |\langle x, e_k \rangle| P \{A_n X \in dx\} \\
&= H_1 + H_2.
\end{aligned}$$

Wir wählen $r_{n,k} > 0$ und $\theta_{n,k}$ mit $\|\theta_{n,k}\| = 1$, so dass $A_n^* e_k = r_{n,k} \theta_{n,k}$. Wir haben schon gezeigt, dass $r_{n,k} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Damit folgt

$$H_1 = nr_{n,k} \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\{|\langle x, \theta_{n,k} \rangle| > Nr_{n,k}^{-1}\}} |\langle x, \theta_{n,k} \rangle| P \{X \in dx\} = nr_{n,k} V_1 \left(Nr_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k} \right).$$

Da $\eta \in ROV_{\infty}(E, c)$ für jedes $c \geq 1$ ist, liefert Satz 2.1.21, dass U_2 gleichmäßig R-O variierend in $\|\theta\| = 1$ ist und Satz 2.1.22 impliziert, dass das erste Tail-Moment V_1 existiert. Nach Korollar 2.1.20 (i) erhalten wir für eine positive Konstante $M_2 < \infty$

$$\frac{Nr_{n,k}^{-1} V_1(Nr_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{U_2(Nr_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \leq M_2$$

für alle $\|\theta_{n,k}\| = 1$ und alle n groß genug. Da $a_p < 1$ ist, können wir $\gamma > 0$ wählen, so dass $\frac{1}{a_p} > 1 + \gamma$ gilt. Dann folgt nach Satz 2.1.21 für eine positive Konstante c_2

$$\frac{U_2(Nr_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{U_2(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \leq c_2 N^{2+\gamma-\frac{1}{a_p}}$$

für alle $\|\theta_{n,k}\| = 1$ und alle n groß genug. Satz 2.1.19 liefert, dass V_0 gleichmäßig R-O variierend in $\|\theta\| = 1$ ist. Damit folgt aus Korollar 2.1.20 (ii) für ein $m_2 > 0$

$$\frac{r_{n,k}^{-2} V_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{U_2(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \geq m_2$$

für alle $\|\theta_{n,k}\| = 1$ und alle n groß genug. Nach (4.15) gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n V_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) \leq C(e_k) < \infty.$$

Somit gilt für alle großen n

$$\begin{aligned}
nr_{n,k}V_1(Nr_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) &= N^{-1} \frac{Nr_{n,k}^{-1}V_1(Nr_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{U_2(Nr_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \frac{U_2(Nr_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{U_2(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \\
&\quad \frac{U_2(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{r_{n,k}^{-2}V_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} nV_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) \\
&\leq N^{-1} M_2 c_2 N^{2+\gamma-\frac{1}{a_p}} m_2^{-1} (C(e_k) + 1) \\
&= CN^{-\gamma'},
\end{aligned}$$

wobei $C = \frac{M_2 c_2 (C(e_k) + 1)}{m_2} > 0$ und $\gamma' = \frac{1}{a_p} - 1 - \gamma > 0$. Damit können wir H_1 beliebig klein für alle großen n wählen, wenn $N > 1$ groß genug ist. Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
H_2 &= n \int_{\Gamma} 1_{\{\|x\|_0 > N, |\langle x, e_k \rangle| \leq N\}} |\langle x, e_k \rangle| P\{A_n X \in dx\} \\
&\leq Nn \int_{\Gamma} 1_{\{\|x\|_0 > N, |\langle x, e_k \rangle| \leq N\}} P\{A_n X \in dx\} \\
&\leq Nn \int_{\Gamma} 1_{\{\|x\|_0 > N\}} P\{A_n X \in dx\} \\
&= NnP\{\|A_n X\|_0 > N\}.
\end{aligned}$$

Da e_1, \dots, e_d die Standardbasis von \mathbb{R}^d ist, existiert eine Konstante $M > 0$, so dass für eine Konstante $C > 0$

$$\{x \in \Gamma : \|x\|_0 > N\} \subset \{x \in \Gamma : \|x\| > CN\} \subset \bigcup_{k=1}^d \{x \in \Gamma : |\langle x, e_k \rangle| > MN\}.$$

Die erste Inklusion gilt, da alle Normen auf \mathbb{R}^d äquivalent sind. Zu der zweiten Inklusion nehmen wir an, dass $|\langle x, e_k \rangle| \leq MN$ für alle $k = 1, \dots, d$ gilt. Dann gilt

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^d \langle x, e_k \rangle^2 \leq (MN)^2 d = C^2 N^2$$

für $M = Cd^{-\frac{1}{2}}$. Das widerspricht aber $\|x\| > CN$.

Für $A_n^* e_k = r_{n,k} \theta_{n,k}$ mit $r_{n,k} > 0$ und $\|\theta_{n,k}\| = 1$ gilt $r_{n,k} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
H_2 &\leq NnP\{\|A_n X\|_0 > N\} \\
&\leq Nn \sum_{k=1}^d P\{|\langle A_n X, e_k \rangle| > MN\} \\
&= Nn \sum_{k=1}^d P\{|\langle X, A_n^* e_k \rangle| > MN\} \\
&= Nn \sum_{k=1}^d P\left\{|\langle X, \theta_{n,k} \rangle| > MNr_{n,k}^{-1}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^d NnV_0(MNr_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}).
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.2.5 ist $\eta \in RVM_\infty(E)$ mit Grenzmaß ϕ_0 und damit ist nach Satz 2.1.15 (i) $\eta \in ROV_\infty(E, c)$ für alle $c \geq 1$. Da $a_p < 1$ ist, können wir $\gamma > 0$ mit $\frac{1}{a_p} > 1 + \gamma$ wählen. Nach Satz 2.1.19 existiert $c_1 > 0$ und $c_2 < \infty$, so dass

$$c_1 M^{-\gamma - \frac{1}{a_1}} N^{-\gamma - \frac{1}{a_1}} \leq \frac{V_0(MN r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{V_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} \leq c_2 M^{\gamma - \frac{1}{a_p}} N^{\gamma - \frac{1}{a_p}}$$

für alle $\|\theta_{n,k}\| = 1$, für alle n groß genug und für alle $N > 1$ groß genug. Aus (4.15) folgt dann

$$\begin{aligned} NnV_0(MN r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) &= N \frac{V_0(MN r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})}{V_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k})} nV_0(r_{n,k}^{-1}, \theta_{n,k}) \\ &\leq N c_2 M^{\gamma - \frac{1}{a_p}} N^{\gamma - \frac{1}{a_p}} (C(e_k) + 1) = CN^{-\gamma'} \end{aligned}$$

wobei $\gamma' = \frac{1}{a_p} - 1 - \gamma > 0$ und $C = c_2 M^{\gamma - \frac{1}{a_p}} (C(e_k) + 1) > 0$. Damit können wir H_2 beliebig klein für alle großen n für $N > 1$ groß genug wählen. Somit gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} L_1 = 0.$$

Aus der Monotonie der Funktion $z \mapsto \|z^E u\|$ und $\int_0^r \Pi(dz, u) \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned} L_2 &= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r 1_{\{\|z^E u\|_0 > N\}} \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\ &\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} \|r^E u\|_0 \int_0^r \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\ &\leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} \|r^E u\|_0 P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \}. \end{aligned}$$

Damit folgt analog zum Beweis von L_1 , dass $\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} L_2 = 0$ gilt und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_6 = \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x \phi(dx).$$

Wir müssen noch zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} I_5 = -m$. Es gilt

$$\begin{aligned} I_5 &= n \mathbb{E}(A_n X - Y_{n1}) \\ &= n \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \}. \end{aligned}$$

Sei $0 < \epsilon < 1 < N < \infty$ fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_5 &= n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 < \epsilon\}} \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\ &\quad + n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\epsilon \leq \|r^E u\|_0 \leq N\}} \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\ &\quad + n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\ &= I_{51} + I_{52} + I_{53}. \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung, die Monotonie der Funktion $z \mapsto \|z^E u\|_0$ und (4.28) liefern

$$\begin{aligned}
& \|I_{51}\|_0 \\
& \leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 < \epsilon\}} \int_0^r \|r^E u - z^E u\|_0 \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
& \leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 < \epsilon\}} \int_0^r \|r^E u\|_0 + \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) \\
& \quad P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
& \leq 2n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 < \epsilon\}} \int_0^r \|r^E u\|_0 \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
& = 2n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 < \epsilon\}} \|r^E u\|_0 (1 - \pi(r, u)) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
& \leq 2Cn \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 < \epsilon\}} \|r^E u\|_0^2 P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \}.
\end{aligned}$$

Analog zu I_1 gilt dann $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{51} = 0$.

Desweiteren folgt aus der Dreiecksungleichung, der Monotonie der Funktion $z \mapsto \|z^E u\|_0$ und $\int_0^r \Pi(dz, u) \leq 1$ für alle $u \in S_0$

$$\begin{aligned}
& \|I_{53}\|_0 \\
& \leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} \int_0^r \|r^E u - z^E u\|_0 \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
& \leq n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} \int_0^r \|r^E u\|_0 + \|z^E u\|_0 \Pi(dz, u) \\
& \quad P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
& \leq 2n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} \int_0^r \|r^E u\|_0 \Pi(dz, u) P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \} \\
& \leq 2n \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\|r^E u\|_0 > N\}} \|r^E u\|_0 P \{ \tau(A_n X) \in dr, l(A_n X) \in du \}.
\end{aligned}$$

Analog zu L_1 folgt $\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{53} = 0$.

Nach Lemma 4.2.6 ist die Funktion

$$(r, u) \mapsto \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u)$$

gleichmäßig gemeinsam stetig und damit auch beschränkt auf der kompakten Menge $A = \{\epsilon \leq \|r^E u\|_0 \leq N\}$ mit $\text{dist}(A, 0) > 0$ und $\phi_0(\partial A) = 0$. Damit folgt aus (4.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{52} = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_{\{\epsilon \leq \|r^E u\|_0 \leq N\}} \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du)$$

und somit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_5 = \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du).$$

Zusammengefasst gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_5 + I_6 = \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{E}(A_n X - Y_{n1}) + n \int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} x P\{Y_{n1} \in dx\} = m'.$$

Damit folgt

$$S_n(n) - n\mathbb{E}(A_n X) = (S_n(n) - b_n) + (b_n - n\mathbb{E}(A_n X)) \Rightarrow Y - m' = \tilde{Y},$$

wobei \tilde{Y} die charakteristische Funktion (4.26) besitzt. \square

Bemerkung 4.2.7. Für $pTOS_E$ Verteilungen ist

$$\limsup_{r \downarrow 0} \sup_{u \in S_0} r^{1-(a_p+\delta')} \int_0^\infty sQ(ds|u) < \infty$$

hinreichende Bedingung für (4.25), denn es gilt für alle $r > 0$

$$\begin{aligned} r^{-(a_p+\delta')}(1 - q(r, u)) &= r^{-(a_p+\delta')} \left(1 - \int_0^\infty e^{-rs} Q(ds|u) \right) \\ &= r^{-(a_p+\delta')} \int_0^\infty (1 - e^{-rs}) Q(ds|u) \\ &\leq r^{1-(a_p+\delta')} \int_0^\infty sQ(ds|u) < \infty. \end{aligned}$$

Der nächste Satz zeigt, dass die zeitstetige tempered Irrfahrt den tempered operator stabilen Lévy-Prozess approximiert.

Satz 4.2.8. Sei $S_n(n)$ die tempered Irrfahrt mit $S_n(n) - b_n \Rightarrow X$ für $n \rightarrow \infty$. Dabei ist die Verteilung von X proper tempered operator stabil und besitzt die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle \lambda, X \rangle}) = \exp \left(\int_{\Gamma} \left(e^{i\langle \lambda, x \rangle} - 1 - i\langle \lambda, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}} \right) \phi(dx) \right).$$

Dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\{S_n(\lfloor nt \rfloor) - tb_n : t \geq 0\} \xrightarrow{fdd} \mathbb{X}, \quad (4.29)$$

wobei $\mathbb{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess mit $X(1) \stackrel{d}{=} X$ und $S_n(\lfloor nt \rfloor) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} Y_{nk}$ ist. Dabei bezeichnet $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußklammer.

Beweis Da $\frac{nt-1}{n} \leq \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \leq \frac{nt}{n} = t$ ist, konvergiert $\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen t . Damit liefert die Konvergenz in (4.9)

$$\lfloor nt \rfloor P\{Y_{n1} \in \cdot\} = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} nP\{Y_{n1} \in \cdot\} \rightarrow t\phi(\cdot) \quad \text{in } \mathcal{M}.$$

Die Konvergenz in (4.11) impliziert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lfloor nt \rfloor \mathbb{E}(\|Y_{n1}\|_0^2 1_{\{\|Y_{n1}\|_0 \leq \epsilon\}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} n\mathbb{E}(\|Y_{n1}\|_0^2 1_{\{\|Y_{n1}\|_0 \leq \epsilon\}}) = 0.$$

Der Konvergenzsatz für Dreieckssysteme liefert $S_n(\lfloor nt \rfloor) - \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} b_n \Rightarrow X(t)$. Dabei besitzt $X(t)$ die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle \lambda, X(t) \rangle}) = \exp \left(t \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle \lambda, x \rangle} - 1 - i \langle \lambda, x \rangle 1_{\{\|x\|_0 < 1\}}) \phi(dx) \right) \right). \quad (4.30)$$

Nach (4.11) ist $n\mathbb{E}(\|Y_{n1}\|_0^2 1_{\{\|Y_{n1}\|_0 \leq 1\}})$ beschränkt. Damit folgt aus $(nt - \lfloor nt \rfloor) \leq 1$ und der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} \|tb_n - \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} b_n\|_0 &= \|(nt - \lfloor nt \rfloor) \int_{\{\|x\|_0 < 1\}} x P\{Y_{n1} \in dx}\|_0 \\ &\leq \int_{\{\|x\|_0 < 1\}} \|x\|_0 P\{Y_{n1} \in dx\} \\ &\leq \left(\int_{\{\|x\|_0 < 1\}} \|x\|_0^2 P\{Y_{n1} \in dx\} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\{\|x\|_0 < 1\}} P\{Y_{n1} \in dx\} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\{\|x\|_0 < 1\}} \|x\|_0^2 P\{Y_{n1} \in dx\} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \left(n \int_{\{\|x\|_0 < 1\}} \|x\|_0^2 P\{Y_{n1} \in dx\} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $tb_n - \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} b_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Somit gilt

$$S_n(\lfloor nt \rfloor) - tb_n \Rightarrow X(t).$$

Dabei besitzt $X(t)$ die charakteristische Funktion (4.30).

Seien jetzt $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$. Es gilt

$$\begin{aligned} &(S_n(\lfloor nt_i \rfloor) - t_i b_n) - (S_n(\lfloor nt_{i-1} \rfloor) - t_{i-1} b_n) \\ &= S_n(\lfloor nt_i \rfloor) - S_n(\lfloor nt_{i-1} \rfloor) - (t_i - t_{i-1}) b_n \\ &\stackrel{d}{=} S_n(\lfloor nt_i \rfloor - \lfloor nt_{i-1} \rfloor) - (t_i - t_{i-1}) b_n \\ &= S_n(\lfloor nt_{n,i} \rfloor) - (t_i - t_{i-1}) b_n \\ &\Rightarrow X(t_i - t_{i-1}) \stackrel{d}{=} X(t_i) - X(t_{i-1}) \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \dots, m$, denn $t_{n,i} = \frac{\lfloor nt_i \rfloor - \lfloor nt_{i-1} \rfloor}{n}$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen $t_i - t_{i-1}$. Da die Zuwächse unabhängig sind, folgt

$$\{(S_n(\lfloor nt_i \rfloor) - t_i b_n) - (S_n(\lfloor nt_{i-1} \rfloor) - t_{i-1} b_n)\}_{i=1, \dots, m} \Rightarrow \{X(t_i) - X(t_{i-1})\}_{i=1, \dots, m}.$$

Da die Funktion $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, \sum_{k=1}^m x_k)$ stetig ist, folgt nach dem Continuous-Mapping Theorem

$$\{S_n(\lfloor nt_i \rfloor) - t_i b_n\}_{i=1, \dots, m} \Rightarrow \{X(t_i)\}_{i=1, \dots, m}$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 4.2.9. Aus der Konvergenz (4.20) der tempered Irrfahrt in Satz 4.2.1 und theorem 16.14 in [16] folgt sogar

$$\{S_n(\lfloor nt \rfloor) - b_{\lfloor nt \rfloor} : t \geq 0\} \Rightarrow \mathbb{X} \quad \text{in } D([0, \infty), \mathbb{R}^d) \quad (4.31)$$

mit $\mathbb{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess, wobei $X(1)$ eine $pTOS_E$ Verteilung besitzt.

Wir haben in diesem Kapitel eine Irrfahrt konstruiert, die einen $pTOS_E$ verteilten Zufallsvektor approximiert. Wir haben die Konvergenz der tempered Irrfahrt (4.20) nicht nur gegen $pTOS_E$ Verteilung sondern gegen eine allgemeinere Klasse bewiesen. Wir haben nämlich die Behauptung für Grenzverteilungen gezeigt, die ein Lévy-Maß ϕ mit der Form

$$\phi(A) = \int_{S_0} \int_0^\infty 1_A(r^E u) q(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du)$$

für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ besitzt. Dabei ist q eine Funktion mit $r \mapsto q(r, u)$ stetig und monoton fallend, $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r, u) = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} q(r, u) = 1$ für alle $u \in S_0$ und $u \mapsto q(r, u)$ stetig für alle $r > 0$. Also gelten diese Konvergenzsätze auch für alle $pTOS_E^\rho$ für $\rho > 0$. Dabei definieren wir die Funktion $\pi_\rho : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow (0, \infty)$ durch

$$\pi_\rho(r, u) := r \int_r^\infty q(s^\rho, u) \frac{ds}{s^2}$$

für alle $u \in S_0$. In diesem Fall ersetzen wir in den obigen Voraussetzungen $q(r, u)$ durch $q(r^\rho, u)$. Im nächsten Kapitel werden wir eine Reihendarstellung für den Lévy-Prozess $\mathbb{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ mit der Eigenschaft, dass $X(1)$ eine $pTOS_E$ Verteilung besitzt, herleiten.

Kapitel 5

Reihendarstellung eines $pTOS_E$ Lévy-Prozesses

5.1 Reihendarstellung

Im Folgenden seien $(\vartheta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvektoren auf S_0 mit Verteilung $\frac{\sigma}{\sigma(S_0)}$ und $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und auf $[0, T]$ gleichverteilter Zufallsvariablen mit $T > 0$. Die Folge $(\Gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist gegeben durch $\Gamma_j = E_1 + \dots + E_j$ mit $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen und E_1 ist exponentialverteilt mit Erwartungswert gleich 1. Außerdem sei $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter $(0, \infty)$ -wertiger Zufallsvariablen mit $P\{Z_j \in \cdot | U_j, \vartheta_j\} = \Pi(\cdot, \vartheta_j)$, dabei ist $\Pi(\cdot | \vartheta_j)$ gegeben durch (4.3) und (4.6), wobei die Funktion q die Voraussetzungen von Kapitel 4 erfüllt, d. h. q ist die Tempering-Funktion einer $pTOS_E$ Verteilung und $u \mapsto q(r, u)$ ist stetig für alle $r > 0$. Die zufälligen Folgen $(\vartheta_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(\Gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sind unabhängig. Weiter seien die Folgen $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(\Gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ unabhängig. Wir setzen $\xi_j := (Z_j, \vartheta_j)$, unabhängig identisch verteilte Zufallsvektoren auf $S = (0, \infty) \times S_0$ mit gemeinsamer Verteilung

$$F(dr, du) = \sigma(S_0)^{-1} \Pi(dr, u) \sigma(du).$$

Sei $E \in L(\mathbb{R}^d)$ der Exponent einer (t^E) operator stabilen Verteilung, die das Lévy-Maß ϕ_0 und keinen Gaußanteil besitzt.

Satz 5.1.1. *Sei $t \in [0, T]$.*

(i) *Sei $a_1 > 1$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1_{(0, t]}(U_j) \left(\left(\frac{\Gamma_j}{T\sigma(S_0)} \right)^{-1} \wedge Z_j \right)^E \vartheta_j \quad (5.1)$$

f. s. gleichmäßig in $t \in [0, T]$ gegen einen Lévy-Prozess $\mathbb{X}_1 = \{X_1(t) : t \in [0, T]\}$. Dabei besitzt $X_1(t)$ die charakteristische Funktion von der Form

$$\mathbb{E}(e^{i\langle \lambda, X_1(t) \rangle}) = \exp \left(t \int_{\Gamma} (e^{i\langle \lambda, x \rangle} - 1) \phi(dx) \right) \quad (5.2)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}^d$ und ϕ ist das Lévy-Maß einer proper tempered operator stabilen Verteilung mit Exponent E .

(ii) Sei $a_p < 1$ und sei für ein $\delta' > 0$

$$\limsup_{r \downarrow 0} \sup_{u \in S_0} \frac{1 - q(r, u)}{r^{a_p + \delta'}} < \infty. \quad (5.3)$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1_{(0,t]}(U_j) \left(\left(\frac{\Gamma_j}{T\sigma(S_0)} \right)^{-1} \wedge Z_j \right)^E \vartheta_j - \frac{t}{T} b_j \quad (5.4)$$

mit

$$b_j = \int_{j-1}^j \mathbb{E} \left(\left(\frac{s}{T\sigma(S_0)} \right)^{-E} \vartheta_1 \right) ds \quad (5.5)$$

f. s. gleichmäßig in $t \in [0, T]$ gegen einen Lévy-Prozess $\mathbb{X}_2 = \{X_2(t) : t \in [0, T]\}$. Dabei besitzt $X_2(t)$ die charakteristische Funktion von der Form

$$\mathbb{E}(e^{i\langle \lambda, X_2(t) \rangle}) = \exp \left(t \left(i \langle \lambda, m \rangle + \int_{\Gamma} (e^{i\langle \lambda, x \rangle} - 1 - i \langle \lambda, x \rangle) \phi(dx) \right) \right) \quad (5.6)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}^d$. ϕ ist das Lévy-Maß einer proper tempered operator stabilen Verteilung mit Exponent E und

$$m = - \int_{S_0} \int_0^{\infty} \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du). \quad (5.7)$$

Beweis Nach Theorem 5.1 im Artikel [20] reicht es die f.s. Konvergenz für ein festes t zu zeigen. Wir betrachten die messbare Funktion $H : (0, \infty) \times S \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit

$$H(\Gamma_j, \xi_j) = H(\Gamma_j, (Z_j, \vartheta_j)) = \left(\left(\frac{\Gamma_j}{T\sigma(S_0)} \right)^{-1} \wedge Z_j \right)^E \vartheta_j \quad (5.8)$$

Da die Funktion $r \mapsto \|r^E u\|_0$ monoton wachsend ist, folgt, dass die Abbildung $r \mapsto \|H(r, \xi)\|_0$ für alle $\xi \in S$ monoton fallend ist. Außerdem gilt

$$\int_0^{\infty} P \{ H(r, \xi_1) 1_{(0,t]}(U_1) \in A \} dr = t\phi(A) \quad (5.9)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$, denn es gilt für $A = \{r^E u : r > a, u \in B\}$ mit $a > 0$ und $B \in \mathcal{B}(S_0)$ wegen der Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} P \{ H(r, \xi_1) 1_{(0,t]}(U_1) \in A \} dr \\ &= \int_0^{\infty} P \left\{ \left(\left(\frac{r}{T\sigma(S_0)} \right)^{-1} \wedge Z_1 \right)^E \vartheta_1 1_{(0,t]}(U_1) \in A \right\} dr \\ &= \int_0^{\infty} P \left\{ U_1 \in (0, t], \left(\frac{r}{T\sigma(S_0)} \right)^{-1} \wedge Z_1 > a, \vartheta_1 \in B \right\} dr \\ &= P \{ U_1 \in (0, t] \} \int_0^{\infty} \mathbb{E} \left(1_{\left\{ r < \frac{T\sigma(S_0)}{a}, Z_1 > a, \vartheta_1 \in B \right\}} \right) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t}{T} \int_0^{\frac{T\sigma(S_0)}{a}} dr P \{Z_1 > a, \vartheta_1 \in B\} \\
&= \frac{t}{T} \frac{T\sigma(S_0)}{a} \sigma(S_0)^{-1} \int_B \int_a^\infty \Pi(dz, u) \sigma(du) \\
&= t \int_B a^{-1} \pi(a, u) \sigma(du) \\
&= t \int_B \int_a^\infty q(r, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\
&= t\phi(A).
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung folgt aus der Definition der Funktion π . Da das System aller Mengen der Form A ein schnittstabiler Erzeuger der Borelschen σ -Algebra $\mathcal{B}(\Gamma)$ ist, gilt die Behauptung (5.9) für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$.

(i) Sei $a_1 > 1$. Es folgt aus Lemma 3.2.6

$$\int_{\{0 < \|x\|_0 \leq 1\}} \|x\|_0 \phi(dx) < \infty.$$

Nach Corollary (A2)(i) im Artikel [21] konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} H(\Gamma_j, (Z_j, \vartheta_j)) 1_{\{U_j \leq t\}}$$

f. s. gegen $X_1(t)$ mit charakteristischer Funktion (5.2).

(ii) Sei $a_p < 1$. Dann existiert das erste Moment der $pTOS_E$ Verteilung und damit gilt

$$\int_{\{\|x\|_0 \geq 1\}} \|x\|_0 \phi(dx) < \infty.$$

Nach Corollary (A2)(ii) im Artikel [21] konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} H(\Gamma_j, (Z_j, \vartheta_j)) 1_{\{U_j \leq t\}} - c_j(T)$$

f. s. gegen $X(t)$ mit charakteristischer Funktion

$$\mathbb{E}(e^{i\langle \lambda, X(t) \rangle}) = \exp \left(t \left(\int_{\Gamma} (e^{i\langle \lambda, x \rangle} - 1 - i\langle \lambda, x \rangle) \phi(dx) \right) \right).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
c_j(T) &= \int_{j-1}^j \mathbb{E} (H(r, (Z_1, \vartheta_1)) 1_{(0, t]}(U_1)) dr \\
&= P \{U_1 \leq t\} \int_{j-1}^j \mathbb{E} (H(r, (Z_1, \vartheta_1))) dr \\
&= \frac{t}{T} b'_j.
\end{aligned}$$

Damit reicht es zu zeigen

$$\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - b'_j) = -Tm,$$

denn dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} H(\Gamma_j, (Z_j, \vartheta_j)) 1_{\{U_j \leq t\}} - \frac{t}{T} b_j \\ &= \frac{t}{T} (Tm + \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - b'_j)) + \sum_{j=1}^{\infty} H(\Gamma_j, (Z_j, \vartheta_j)) 1_{\{U_j \leq t\}} - \frac{t}{T} b_j \\ &= tm + \sum_{j=1}^{\infty} H(\Gamma_j, (Z_j, \vartheta_j)) 1_{\{U_j \leq t\}} - \frac{t}{T} b_j + \frac{t}{T} (b_j - b'_j) \\ &= tm + \sum_{j=1}^{\infty} H(\Gamma_j, (Z_j, \vartheta_j)) 1_{\{U_j \leq t\}} - \frac{t}{T} b'_j \end{aligned}$$

konvergiert f. s. gegen $X_2(t)$ mit charakteristischer Funktion (5.6).

Aus der Substitution $r = \left(\frac{s}{T\sigma(S_0)}\right)^{-1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \|b_j - b'_j\|_0 \\ &\leq \int_0^{\infty} \mathbb{E} \left\| \left(\frac{s}{T\sigma(S_0)}\right)^{-E} \vartheta_1 - \left(\left(\frac{s}{T\sigma(S_0)}\right)^{-1} \wedge Z_1 \right)^E \vartheta_1 \right\|_0 ds \\ &= \sigma(S_0)^{-1} \int_{S_0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\| \left(\frac{s}{T\sigma(S_0)}\right)^{-E} u - \left(\left(\frac{s}{T\sigma(S_0)}\right)^{-1} \wedge z \right)^E u \right\|_0 \Pi(dz, u) ds \sigma(du) \\ &= T \int_{S_0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \|r^E u - (r \wedge z)^E u\|_0 \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\ &= T \int_{S_0} \int_0^{\infty} \int_0^r \|r^E u - z^E u\|_0 \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) < \infty \end{aligned}$$

wegen (5.3), siehe den Beweis von Lemma 4.2.5. Außerdem gilt mit $\int_0^{\infty} \Pi(dz, u) = 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - b'_j) \\ &= \sigma(S_0)^{-1} \int_{S_0} \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{T\sigma(S_0)}\right)^{-E} u ds \sigma(du) \\ &\quad - \sigma(S_0)^{-1} \int_{S_0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{s}{T\sigma(S_0)}\right)^{-1} \wedge z \right)^E u \Pi(dz, u) ds \sigma(du) \\ &= T \left(\int_{S_0} \int_0^{\infty} (r^E u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) - \int_{S_0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} ((r \wedge z)^E u) \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T \left(\int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^\infty (r^E u) \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) - \int_{S_0} \int_0^\infty \int_r^\infty (r^E u) \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \right. \\
&\quad \left. - \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r (z^E u) \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \right) \\
&= T \int_{S_0} \int_0^\infty \int_0^r (r^E u - z^E u) \Pi(dz, u) \frac{dr}{r^2} \sigma(du) \\
&= -Tm.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.1.2.

(i) Da $a_p < 1$ ist, existiert $(I - E)^{-1}$ und es gilt

$$\frac{\partial(I - E)^{-1} r^{I-E}}{\partial r} = (I - E)^{-1} (I - E) r^{-E} = r^{-E},$$

wobei I der Identitätsoperator ist. Damit liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}
b_j &= \int_{j-1}^j \left(\frac{r}{T\sigma(S_0)} \right)^{-E} dr \mathbb{E}(\vartheta_1) \\
&= (T\sigma(S_0))^E \int_{j-1}^j r^{-E} dr \mathbb{E}(\vartheta_1) \\
&= (T\sigma(S_0))^E (I - E)^{-1} (j^{I-E} - (j-1)^{I-E}) \mathbb{E}(\vartheta_1). \quad (5.10)
\end{aligned}$$

(ii) Die Verteilungsfunktion von Z_j hat im Allgemeinen keine explizite Darstellung. Um Z_j zu simulieren, gehen wir deshalb wie folgt vor:

Sei $(E'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit E'_j standard exponentialverteilt und sei $(U'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger auf $(0, 1)$ gleichverteilter Zufallsvariablen. Seien weiter Λ_j für $j \in \mathbb{N}$ unabhängig mit

$$P\{\Lambda_j \in \cdot | \vartheta_j = u\} = Q(\cdot | u)$$

wobei $Q(\cdot | u)$ die Laplace-Transformierte $q(\cdot, u)$ für $u \in S_0$ besitzt. Außerdem seien $(E'_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(U'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(\Lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ unabhängig. Dann gilt für alle $a > 0$

$$P\{Z_j > a | \vartheta_j = u\} = P\{E'_j U'_j \Lambda_j^{-1} > a | \vartheta_j = u\}, \quad (5.11)$$

denn es gilt nach Voraussetzungen

$$\begin{aligned}
&P\{E'_j U'_j \Lambda_j^{-1} > a | \vartheta_j = u\} \\
&= \int_0^\infty P\{E'_j U'_j > a \Lambda_j | \Lambda_j = s, \vartheta_j = u\} P\{\Lambda_j \in ds | \vartheta_j = u\} \\
&= \int_0^\infty P\{E'_j U'_j > as\} Q(ds | u) \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 P\{E'_j > as(U'_j)^{-1} | U'_j = x\} dx Q(ds | u) \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 P\{E'_j > asx^{-1}\} dx Q(ds | u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-asx^{-1}} dx Q(ds|u) \\
&= a \int_0^\infty \int_a^\infty e^{-sr} \frac{dr}{r^2} Q(ds|u) \\
&= a \int_a^\infty \int_0^\infty e^{-sr} Q(ds|u) \frac{dr}{r^2} \\
&= a \int_a^\infty q(r, u) \frac{dr}{r^2} \\
&= \pi(a, u) \\
&= P\{Z_j > a | \vartheta_j = u\}
\end{aligned}$$

Die sechste Gleichung folgt aus der Substitution $r := ax^{-1}$.

(iii) Die Sprünge von \mathbb{X}_1 und \mathbb{X}_2 sind entweder gleich

$$\left(\frac{\Gamma_j}{T\sigma(S_0)}\right)^{-E} \vartheta_j$$

oder

$$Z_j^E \vartheta_j.$$

Wenn T klein genug ist, dann dominieren die Sprünge $\left(\frac{\Gamma_j}{T\sigma(S_0)}\right)^{-E} \vartheta_j$ und wir erhalten einen (t^E) operator stabilen Lévy-Prozess auf kurze Zeit betrachtet. Wenn T groß genug ist, dann sind die Sprünge gleich den unabhängigen identisch verteilten Zufallsvektoren $Z_j^E \vartheta_j$. Damit erklärt der Zentrale Grenzwertsatz das Verhalten einer Brownschen Bewegung auf lange Zeit betrachtet, falls $\mathbb{E}(\|Z_1^E \vartheta_1\|_0^2)$ existiert.

5.2 Beispiele

Folgende Beispiele dienen der Veranschaulichung des Effektes der Änderung des Lévy-Maßes. Nach Bemerkung 6.1.6 im Buch [18] erfüllt die euklidische Norm die Eigenschaften (i) und (ii) aus Bemerkung 2.2.4, falls der Exponent E in der Jordanschen Form ohne nilpotenten Anteil ist. Wenn E in der Jordanschen Form ist, dann erfüllt die euklidische Norm auf \mathbb{R}^2 die Eigenschaften (i) und (ii) aus Bemerkung 2.2.4. In diesem Abschnitt nehmen wir das kartesische Koordinatensystem in \mathbb{R}^2 mit der Standardbasis $e_1 = (1, 0)^T$ und $e_2 = (0, 1)^T$. Dann schreiben wir für den (t^E) operator stabilen Lévy-Prozess \mathbb{Y} durch $Y(t) = Y_1(t)e_1 + Y_2(t)e_2$ und für den $pTOS_E$ Lévy-Prozess \mathbb{X} durch $X(t) = X_1(t)e_1 + X_2(t)e_2$ für $t \in [0, T]$. Sei in folgenden Beispielen $T = 1$ und $\Delta t = 0.001$. Wir simulieren die Lévy-Prozesse in den Zeitpunkten $m\Delta t$ für $m = 0, \dots, 1000$. Auf der Abbildungen zeigt das obere Bild $X_2(t)$ gegen $X_1(t)$ (blaue) und $Y_2(t)$ gegen $Y_1(t)$ (rote). Das linke untere Bild stellt $X_1(t)$ und $Y_1(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t dar und das rechte untere Bild stellt $X_2(t)$ und $Y_2(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t dar.

Beispiel 5.2.1.

Sei $E = \begin{pmatrix} \frac{10}{18} & 0 \\ 0 & \frac{10}{15} \end{pmatrix}$. Dann sind die Realteile der Eigenwerte $a_1 = \frac{10}{18}$ und $a_2 = \frac{10}{15}$.

Da E diagonal ist, wählen wir $\|\cdot\|_0$ als die euklidische Norm. S_0 ist dann der Einheitskreis. Sei weiter das Spektralmaß σ die Gleichverteilung auf den Punkten e_1 und e_2 , d. h. $\sigma(\{e_1\}) = \sigma(\{e_2\}) = \frac{1}{2}$. Daraus folgt $\mathbb{E}(\vartheta_j) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$. Die Tempering-Funktion sei $q(r, u) = q(r) = e^{-r}$ für alle $u \in S_0$ und $r > 0$. Nach Beispiel 3.2.9 (i) gilt dann $Q(dr|u) = \epsilon_1(dr)$ für alle $u \in S_0$. In diesem Beispiel werden die hohen Sprünge in jede Richtung mit der gleichen Rate e^{-r} abgeschnitten. Siehe Abbildung 5.1.

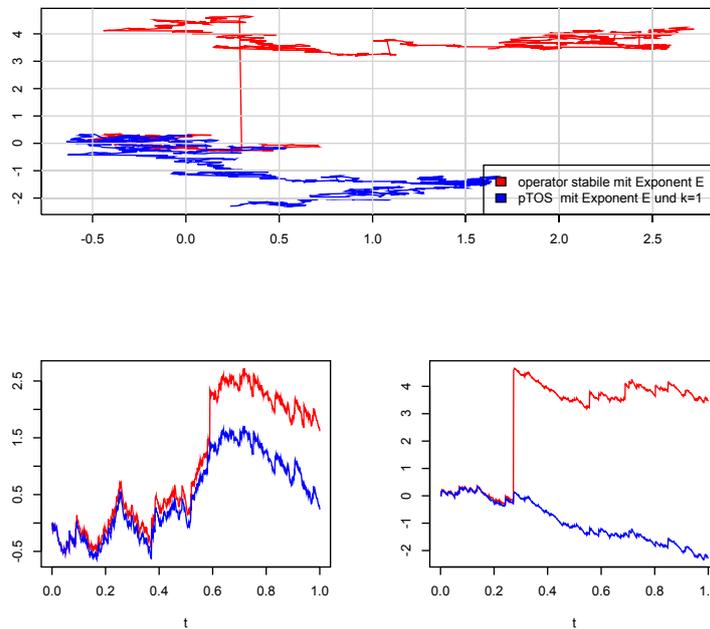


Abbildung 5.1: Die rote Kurve ist ein Pfad eines (t^E) operator stabilen Lévy-Prozesses \mathbb{Y} mit diagonalem Exponent und einem diskreten Spektralmaß und die blaue Kurve ist ein Pfad eines $pTOS_E$ Lévy-Prozesses \mathbb{X} mit dem selben Exponent und Tempering-Funktion $q(r) = e^{-r}$ für alle $u \in S_0$ und $r > 0$.

Wir betrachten jetzt ein Beispiel, indem die Tempering-Funktion von der Richtung abhängt.

Beispiel 5.2.2.

Sei E wie in dem vorherigen Beispiel. Sei σ die Gleichverteilung auf dem Einheitskreis. Wir setzen $\vartheta_j = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(x, y)^T$, wobei x und y unabhängig standard normalverteilt sind. Da $\mathbb{E}(\vartheta_j) = 0$, brauchen wir keine Zentrierung in (5.4). Außerdem sei $q(r, u) = e^{-\kappa(u)r}$ mit $\kappa : S_0 \rightarrow (0, \infty)$, $\kappa(u) = e^{u_1 + u_2}$. In diesem Fall hängt die Änderung der Sprünge von der Richtung ab. Siehe Abbildung 5.2.

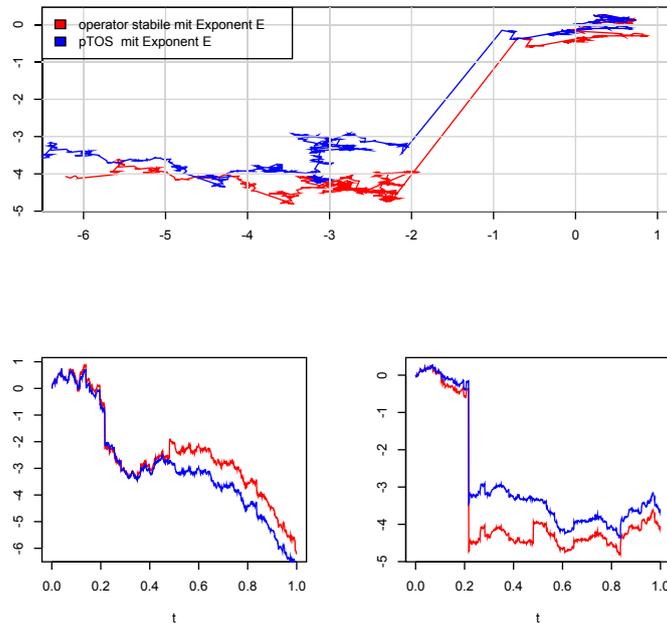


Abbildung 5.2: Die rote Kurve ist ein Pfad eines (t^E) operator stabilen Lévy-Prozesses \mathbb{Y} mit diagonalem Exponent und einem stetigen Spektralmaß und die blaue Kurve ist ein Pfad eines $pTOS_E$ Lévy-Prozesses \mathbb{X} mit dem selben Exponent und Tempering-Funktion $q(r, u) = e^{-\kappa(u)r}$ mit $\kappa(u) = e^{u_1+u_2}$ für alle $u \in S_0$ und $r > 0$.

5.3 R-Algorithmus

In diesem Abschnitt geben wir die Algorithmen in der Programmiersprache R, mit deren Hilfe wir die obigen Beispiele simuliert haben. Wir stellen zunächst drei Hilfsfunktionen vor: Die Funktion „Z“ erzeugt Realisationen der Zufallsvariable Z_j .

```
#Die Funktion Z erzeugt Zufallszahlen, die nach "groß-Pi" verteilt
# sind. Den Parametern der Funktion Z werden die Anzahl der zu
#simulierenden Zufallszahlen n und ein Vektor Lambda der Länge
#n übergeben. Rückgabe ist ein numerischer Vektor z der Länge n.
```

```
Z<-function(Lambda,n){
x<-rexp(n) # erzeugt n Realisationen, die exponentialverteilt sind.
y<-runif(n) #erzeugt n auf [0,1] gleichverteilte Realisationen.
z<-x*y*Lambda^(-1)
invisible(z)
}
```

Die Funktion „pol“ rechnet $r^B v$ für $r > 0$, $v \in S_0$ und eine diagonale Matrix B

```

#Die Funktion pol mit Übergabeparametern B, r und v berechnet  $r^B \cdot v$ .
#Dabei ist B eine diagonale 2x2 Matrix, r eine positive reelle Zahl
#und v ein 2-dimensionale Vektor.
pol<-function(B,r,v){
#Abfrage, ob die Matrix diagonal ist.
if(B[1,2]!=0 && B[2,1]!=0){print("Die Matrix ist nicht diagonal!")}
else{
r1<-r^(B[1,1])
r2<-r^(B[2,2])
x<-matrix(c(r1,0,0,r2),nrow=2)
y<-x%*%v
}
invisible(y)
}

```

und die Funktion „G1“ erzeugt Realisationen einer Gleichverteilung auf dem Einheitskreis S_0 .

```

# Die Funktion G1 mit Übergabeparameter n erzeugt n Realisationen
#der Verteilung "sigma". Dabei ist "sigma" die Gleichverteilung auf
#dem Einheitskreis im  $R^2$ .
G1<-function(n){
x<-rnorm(2*n) #Erzeugung 2n standardnormalverteilter Realisationen.
y<-matrix(x,nrow=2,ncol=n)
for(i in 1:n){
y[,i]<- y[,i]/(y[1,i]^2+y[2,i]^2)^(1/2)
}
invisible(y)
}

```

Das Algorithmus von Beispiel 5.2.1

```

#Erzeugung eines Pfades von einem  $(t^E)$  operator stabilen Levy-Prozess
#und eines Pfades von PTOS_E Levy-Prozess mit Tempering-Funktion
# $q(r,u)=\exp(-r)$ . Dabei ist E aus Beispiel 5.2.1.
# Mit dem Aufruf Sys.time() erhält man einen absoluten Wert,
# der Datum und Uhrzeit enthält. Dieser wird in der Variablen a
# abgelegt.
a<-Sys.time()
#m+1 ist Anzahl der Punkte in der Diskretisierung des Zeitintervalls
m<-1000
t<-seq(0,1,1/m)
#n Anzahl der Terme in der Darstellungsreihe.
n<-10000 #100000
#E der Exponent
E<-matrix(c((10/18),0,0,(10/15)),nrow=2,ncol=2)
#B=I-E

```

```

B<-diag(1,2)-E
#Erzeugung der Realisationen von Gamma_{j}, die einen standard
#Poisson-Prozess bilden
gamma<-cumsum(rexp(n))
x<-gamma^(-1)
#Im Vektor Lambda werden die Realisationen des Dirac-Maßes im Punkt 1
#gespeichert
Lambda<-rep(1,n)
#Erzeugung der Zufallszahlen, die nach "groß-Pi" verteilt sind
z<-Z(Lambda,n)
R<-numeric(n)
for(i in 1:n){
R[i]<-min(x[i],z[i])
}
e1<-c(1,0)
e2<-c(0,1)
u1<-runif(n) #Erzeugung von n auf [0,1] gleichverteilten Zufallszahlen
#Erzeugung der Realisationen von V_{j}, die nach "sigma" verteilt sind.
V<-matrix(0,nrow=2,ncol=n)
for(i in 1:n){
  if(u1[i]< 1/2){V[ ,i]<-e1}
  else {V[ ,i]<- e2}
}
# Erwartungswert von V_{j}
ErwV<-c(0.5,0.5)

S<-array(0,dim=c(2,m+1,n))
S1<-array(0,dim=c(2,m+1,n))
u2<-runif(n)# Erzeugung von n auf [0,1] gleichverteilten Zufallszahlen
for(l in 1:m+1){
for(j in 1:n){
  S[,l,j]<-pol(E,x[j],V[,j])*(u2[j] <= t[l])-
    t[l]*solve(B)%%(pol(B,j,ErwV)-pol(B,j-1,ErwV))
  S1[,l,j]<-pol(E,R[j],V[,j])*(u2[j] <= t[l])-
    t[l]*solve(B)%%(pol(B,j,ErwV)-pol(B,j-1,ErwV))
}}
# Aufsummierung der Realisationen zu einem festen Zeitpunkt t, um die
#Pfade der Levy-Prozesse zu erhalten.
Y<-apply(S,1:2,sum)
X<-apply(S1,1:2,sum)
#Plotten der Pfade
layout(matrix(c(1,2,1,3),2,2))
#Bestimmung der Grenze des Bildes
x11<-max(X[1,])
x12<-min(X[1,])
x21<-max(X[2,])
x22<-min(X[2, ])

```

```

y11<-max(Y[1,])
y12<-min(Y[1,])
y21<-max(Y[2,])
y22<-min(Y[2,])
x1<-max(x11,y11)
x2<-min(x12,y12)
y1<-max(x21,y21)
y2<-min(x22,y22)
plot(Y[1,],Y[2,],typ="l",col="red",xlab="",ylab="",xlim=c(x2,x1),
      ylim=c(y2,y1),lwd=1)
lines(X[1,],X[2,],typ="l",col="blue",lwd=1)
grid()
legend(x="bottomright",fill = c("red", "blue"),
       legend = c("operator stabile mit Exponent E", "pTOS mit Exponent E"))
plot(t,Y[1,],typ="l",col="red", xlab="t",ylab="",ylim=c(x2,x1),lwd=1)
lines(t,X[1,],typ="l",col="blue",lwd=1)
plot(t,Y[2,],typ="l",col="red",xlab="t",ylab="",ylim=c(y2,y1),lwd=1)
lines(t,X[2,],typ="l",col="blue",lwd=1)
e<-Sys.time()
L<- e-a
x<-"Die Laufzeit beträgt"
ausgabe <- paste(x, L, sep = " ") # ausgabe gibt die Laufzeit an
cat(c("\n", ausgabe, "\n"))

```

und das Algorithmus von Beispiel 5.2.2

```

#Beispiel 5.2.2
a<-Sys.time()
m<-1000
t<-seq(0,1,1/m)
n<-10000
E<-matrix(c((10/18),0,0,(10/15)),nrow=2,ncol=2)
gamma<-cumsum(rexp(n))
x<-gamma^(-1)
Lambda<-numeric(n)
V<-G1(n)
for (i in 1:n){
Lambda[i]<-exp(V[1,i]+V[2,i])
}
z<-Z(Lambda,n)
R<-numeric(n)
for(i in 1:n){
R[i]<-min(x[i],z[i])
}
S<-array(0,dim=c(2,m+1,n))
S1<-array(0,dim=c(2,m+1,n))
u1<-runif(n)
for(l in 1:m+1){

```

```

for(j in 1:n){
  S[,1,j]<-pol(E,x[j],V[,j])*(u1[j] <= t[1])
  S1[,1,j]<-pol(E,R[j],V[,j])*(u1[j] <= t[1])
}
Y<-apply(S,1:2,sum)
X<-apply(S1,1:2,sum)
layout(matrix(c(1,2,1,3),2,2))
plot(Y[1,],Y[2,],typ="l",col="red",xlab="",ylab="",lwd=2)
lines(X[1,],X[2,],typ="l",col="blue",lwd=2,lty=2)
grid()
legend(x="topleft",fill = c("red","blue"),
legend = c("operator stabile mit Exponent E ", "pTOS mit Exponent E "))
plot(t,Y[1,],typ="l",col="red", xlab="t",ylab="",lwd=2)
lines(t,X[1,],typ="l",col="blue",lwd=2,lty=2)
plot(t,Y[2,],typ="l",col="red",xlab="t",ylab="",lwd=2)
lines(t,X[2,],typ="l",col="blue",lwd=2,lty=2)
e<-Sys.time()
L<- e-a
x<-"Die Laufzeit beträgt"
ausgabe <- paste(x, L, sep = " ")
cat(c("\n", ausgabe, "\n"))

```

Zusammenfassend haben wir in dieser Arbeit die TOS_E^p , TOS_E und $GTOS_E$ Verteilungen definiert und ihre Eigenschaften bewiesen. Wir haben dann eine Irrfahrt konstruiert, die in Verteilung gegen eine $pTOS_E$ Verteilung unter geeigneter Zentrierung konvergiert. Der Zentrierungsvektor kann abhängig von den Realteilen der Eigenwerte des Exponenten ausgewählt werden. In diesem letzten Kapitel haben wir eine Reihendarstellung für die $pTOS_E$ Lévy-Prozesse hergeleitet. Diese Darstellung zeigt, wie wir durch Abschneiden der Sprünge eines (t^E) operator stabilen Lévy-Prozesses einen $pTOS_E$ Lévy-Prozess erhalten. Cohen, Meerschaert und Rosiński haben in ihrem Artikel [8] eine schnellere Simulationsmethode für (t^E) operator stabile Lévy-Prozess vorgestellt. Dabei werden die kleine Sprünge durch eine Brown'sche Bewegung approximiert. Daher stellt sich die Frage, ob wir diese Methode für $pTOS_E^p$ anwenden können. Außerdem hat Grabchak in seinem Artikel [11] gezeigt, dass die Klasse der TS_α^p Verteilungen unter schwacher Konvergenz nicht abgeschlossen ist. Er hat die Klasse von **extended p-tempered α -stabilen Verteilungen** ETS_α^p definiert. Dann hat er bewiesen, dass diese Klasse die kleinste Klasse ist, die TS_α^p Verteilungen enthält und abgeschlossen unter schwacher Konvergenz ist. Deshalb gibt es folgende offene Fragen: Ist die Klasse von $pTOS_E^p$ Verteilungen abgeschlossen unter schwacher Konvergenz? Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz von Folgen in dieser Klasse gibt es?

Literaturverzeichnis

- [1] BARNDORFF-NIELSEN OLE E., MAEJIMA MAKOTO und SATO KEN-ITI(2006). *Some classes of multivariate infinitely divisible distributions admitting stochastic integral representations*. Bernoulli 12(1), 1-33.
- [2] BIANCHI M. L., RACHEV S. T. , KIM Y. S. und FABOZZI F. J.(2011). *Tempered infinitely divisible distributions and processes*. Theory of Probability and Its Applications. Vol. 55, No. 1, pp. 2-26.
- [3] BIERMÉ HERMINE, MEERSCHAERT MARK M. und SCHEFFLER HANS-PETER (2007). *Operator scaling stable random fields*. Stochastic Processes and their Applications. Vol. 117, 312–332.
- [4] BINGHAM N. H., GOLDIE C. M. und TEUGELS J. L. (1987). *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 27, Cambridge, University Press, London.
- [5] CHAKRABARTY ARIJIT und MEERSCHAERT MARK M. (2011). *Tempered stable laws as random walk limits*. Statistics & Probability Letters 81(8), 989-997.
- [6] CHAKRABARTY ARIJIT und SAMORODNITSKY GENNADY (2010). *Understanding heavy tails in a bounded world or, is a truncated heavy tail heavy or not?* <http://arxiv.org/pdf/1001.3218.pdf>
- [7] COHEN SERGE und ROSIŃSKI JAN(2007). *Gaussian approximation of multivariate Lévy processes with applications to simulation of tempered stable processes*. Bernoulli 13(1), 195–210.
- [8] COHEN SERGE, MEERSCHAERT MARK M. und ROSIŃSKI JAN(2010). *Modeling and simulation with operator scaling*. Stochastic Processes and their Applications 120, 2390–2411.
- [9] FELLER WILLIAM (1966, 1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2*. John Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney, Toronto.
- [10] GRABCHAK MICHAEL (2012). *On a new class of tempered stable distributions: Moments and regular variation*. Journal of Applied Probability 49(4), 1015-1035.

- [11] GRABCHAK MICHAEL (2013). *Limit Theorems for sequences of tempered stable and related distributions*. (Preprint)
- [12] HEINE JÜRGEN (2002). *Topologie und Funktionalanalysis: Grundlagen der Abstrakten Analysis mit Anwendungen*. Oldenbourg Verlag München Wien.
- [13] HIRSCH MORRIS W. und SMALE STEPHEN (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Elsevier Science (USA).
- [14] HOFFMANN ALEXANDER (2011). *Dissertation: Operator Scaling Stable Random Sheets with application to binary mixtures*.
- [15] JUREK ZBIGNIEW J. und MASON J. DAVID (1993). *Operator-Limit Distributions in Probability Theory*. JohnWiley & Sons, New York.
- [16] KALLENBERG OLAV (2002). *Foundations of Modern Probability, 2nd edition*. New York: Springer-Verlag.
- [17] KLENKE ACHIM (2008). *Wahrscheinlichkeitstheorie, 2., korrigierte Auflage*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [18] MEERSCHAERT MARK M. und SCHEFFLER HANS-PETER (2001). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors: Heavy Tails in Theory and Practice*. Wiley Series in Probability and Statistics.
- [19] MEERSCHAERT MARK M. und SIKORSKII ALLA (2012). *Stochastic Models for Fractional Calculus*. De Gruyter.
- [20] ROSIŃSKI JAN (2001) *Series representations of Lévy processes from the perspective of point processes*. In *Levy Processes - Theory and Applications*. O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch and S.I. Resnick, Eds., Birkhauser, Boston, 401-415.
- [21] ROSIŃSKI JAN (2004) *Tempering stable processes* (Preprint). <http://mediatum.ub.tum.de/doc/1072618/1072618.pdf>
- [22] ROSIŃSKI JAN (2007). *Tempering stable processes*. *Stochastic Processes and their Applications* 117 (6), 677-707.
- [23] ROSIŃSKI JAN und SINCLAIRE JENNIFER L. (2010). *Generalized tempered stable processes*. In *Stability in Probability*, Ed. J.K. Misiewicz, Banach Center Publ. 90, 153-170.
- [24] SATO KEN-ITI (1987). *Strictly operator stable distributions*. *Journal of multivariate analysis* 22, 278-295.
- [25] SATO KEN-ITI (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

- [26] SCHILLING RENÉ L., SONG RENMING und VONDRAČEK ZORAN (2012). *Bernstein Functions, Theory and applications, 2nd Edition*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston.
- [27] TERDIK GYÖRGY und WOYCZYŃSKI WOJBOR A. (2006). *Rosiński measures for tempered stable and related Ornstein-Uhlenbeck processes*. Probability and Mathematical Statistics Vol. 26, Fasc. 2, 213-243.
- [28] ZOLOTAREV V. M. (1986). *One-dimensional Stable Distributions*. Translation of Mathematical Monographs 65, American Mathematical Society, Providence, RI.